# Kolorowe kropki

*Joanna JASZUŃSKA*

W wielu zadaniach występują różnokolorowe punkty płaszczyzny, a w ich rozwiązaniach przydatne bywają rozmaite rozumowania kombinatoryczne.

**1.** Maja i Gucio grają w grę. Malują na przemian punkty płaszczyzny wedle następujących reguł. Maja rozpoczyna; w swoim ruchu maluje dowolnie wybrany bezbarwny punkt na kolorowo. Gdy nadchodzi kolej Gucia, wybiera on 2015 bezbarwnych punktów i maluje je na czarno. Maja wygrywa, jeśli na płaszczyźnie pojawią się trzy kolorowe punkty tworzące trójkąt równoboczny. Czy Gucio może jej to uniemożliwić?

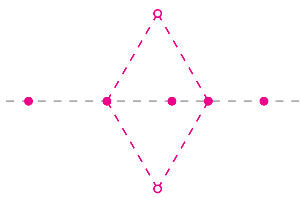
**2.** Każdy punkt płaszczyzny pomalowano jednym z dwóch kolorów. Wykaż, że istnieje na tej płaszczyźnie prostokąt o wierzchołkach jednego koloru.

**3.** Każdy punkt płaszczyzny pomalowano jednym z $n$ kolorów ($n > 2$). Wykaż, że istnieje na tej płaszczyźnie prostokąt o wierzchołkach jednego koloru.

**4.** Każde pole szachownicy $12 \times 12$ pomalowano jednym z trzech kolorów. Wykaż, że istnieją cztery pola o tym samym kolorze, których środki są wierzchołkami prostokąta.

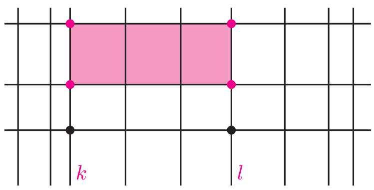
## Rozwiązania

**R1.** Nie, Maja może zastosować następującą strategię, która gwarantuje jej zwycięstwo. W pierwszych $n$ swoich ruchach Maja maluje na kolorowo $n$ punktów z jednej prostej. Każdą parę takich kolorowych punktów można na dwa sposoby uzupełnić do trójkąta równobocznego (rys. 1), par punktów spośród $n$ jest $\frac{1}{2}n(n-1)$, więc łącznie po $n$ ruchach na płaszczyźnie jest $n(n-1)$ takich punktów, że pomalowanie dowolnego z nich na kolorowo da Mai zwycięstwo.


Rys. 1

Dla $n > 2016$ mamy $n(n-1) > 2015n$, zatem Gucio nie może w swoich początkowych $n$ ruchach wszystkich opisanych powyżej punktów pomalować na czarno i Maja może wygrać w ruchu numer $n+1$. $\square$

**R2.** Narysujmy 3 poziome proste, 9 pionowych i rozważmy 27 punktów ich przecięć. Każdy punkt pomalowano jednym z dwóch kolorów, łącznie jest więc $2^3 = 8$ możliwych układów kolorów trójki wyróżnionych punktów z pojedynczej pionowej prostej. Ponieważ mamy 9 pionowych prostych, na pewnych dwóch z nich (nazwijmy je $k$ i $l$) jest ten sam układ kolorów takiej trójki (rys. 2).



Rys. 2

Wśród trzech wyróżnionych punktów na prostej $k$, pomalowanych dwoma kolorami, pewne dwa punkty mają ten sam kolor. Niech to będą dwa wierzchołki szukanego prostokąta, pozostałe dwa to odpowiadające im punkty tego samego koloru z prostej $l$ (leżą one na tych samych poziomych prostych). $\square$

**R3.** Wystarczy uogólnić rozwiązanie poprzedniego zadania i rozważyć $n+1$ prostych poziomych oraz $2^{n+1}+1$ prostych pionowych. $\square$

W zadaniu 4 rozumowanie z zadania 3 nie działa, bowiem $2^{3+1}+1 > 12$.

**R4.** Istnieje kolor, którym pomalowano przynajmniej $\frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 12 = 48$ pól. Rozważmy 48 pól tego właśnie koloru i niech $w_i$ oznacza liczbę tych pól występujących w $i$-tym wierszu; oczywiście $\sum_{i=1}^{12} w_i = 48$. W każdym wierszu dwa spośród rozważanych pól można wybrać na $\frac{1}{2}w_i(w_i-1)$ sposobów. Wobec tego

$$\sum_{i=1}^{12}\frac{1}{2}w_i(w_i-1)=\frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{12}w_i^2-\sum_{i=1}^{12}w_i\Big)\geqslant\frac{12}{2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{12}w_i}{12}\right)^2-\frac{48}{2}=6\left(\frac{48}{12}\right)^2-24=72,$$

przy czym nierówność wynika z nierówności średnich (na marginesie). Tymczasem dwie z 12 kolumn można wybrać na $\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 11 = 66$ sposobów – mniej niż 72. Oznacza to, że w pewnych dwóch wierszach można wybrać po dwa pola tego samego koloru i w tych samych kolumnach; ich środki tworzą szukany prostokąt. $\square$

Dla dowolnych liczb $w_1, w_2, \ldots, w_n$ zachodzi *nierówność między średnią kwadratową a arytmetyczną*:

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i^2}{n}} \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i}{n}.$$

Zadanie 4 pochodzi z obozu naukowego Olimpiady Matematycznej z 2011 roku.