mała delta

O tym, jak Puchatek podzbiory permutował

Niektórzy znajdują co rano na progu swojego domu butelkę ze świeżym mlekiem. Kubuś Puchatek każdego ranka znajduje tam n garnczków miodu. Garnczki są różnej wielkości i Kubuś każdego dnia stara się opróżniać je w innej kolejności. Oczywiście, nawet Kubuś wie (po tym, jak mu to wytłumaczył Krzyś), że jest $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ sposobów, na jakie to może zrobić (na n sposobów może wybrać pierwszy garnczek, na $n-1$ sposobów drugi itd.). Dziś jednak Kubuś jest w nastroju do niebezpiecznych rozmyślań i zastanawia się, co się stanie, jeśli dopuści możliwość, że może nie opróżnić wszystkich garnczków. „Oczywiście, jest to zupełnie bezsensowne z punktu widzenia misiowego żołądka – pomyślał Kubuś. – Ale ciekawe, jak bardzo zwiększy to liczbę sposobów dokonania wyboru.”

Zsumujmy liczbę uporządkowań poszczególnych podzbiorów n-elementowego zbioru garnczków – oznaczmy tę liczbę przez $s(n)$ i spróbujmy ją obliczyć dla małych przykładów. Dla $n=1$ mamy dwie możliwości: Kubuś albo opróżni jedyny garnczek, jaki ma, albo nie zrobi tego, zatem $s(1)=2$. Dla $n=2$ mamy już pięć sposobów postępowania: Kubuś nie robi nic, opróżnia jeden z dwóch garnczków, albo opróżnia oba garnczki w jednej z dwóch kolejności. Natomiast dla trzech garnczków mamy $s(3)=16$ sposobów (nic, 1, 2, 3, 12, 13, 21, 23, 31, 32, 123, 132, 213, 231, 312, 321). Wyniki dalszych eksperymentów udokumentowane są w tabelce na marginesie.

n	$n!$	$s(n)$
1	1	2
2	2	5
3	6	16
4	24	65
5	120	326
6	720	1957

Liczba uporządkowań n garnczków oraz liczba uporządkowań dowolnych podzbiorów n garnczków.

Z tabelki wynika, że dla małych przykładów $s(n) < 3 \cdot n!$, czyli rozważanie uporządkowań podzbiorów zwiększa liczbę sposobów co najwyżej 3 razy. Okazuje się, że tak jest również dla większych n. Kubuś chętnie podzieliłby się tym odkryciem z Krzysiem, ale do tego potrzebuje je udowodnić. Pomóżmy mu.

Jeśli Kubuś chce danego dnia opróżnić k garnczków, to pierwszy garnczek może wybrać na n sposobów, drugi na $n-1$ sposobów, aż do ostatniego, który może wybrać na $n+1-k$ sposobów. To sumarycznie daje nam $n!/(n-k)!$ możliwości. Sumując po wszystkich możliwych wyborach k, dostajemy

$$s(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} = n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Gdybyśmy poprosili o pomoc uczoną Sowę, na pewno podpowiedziałaby nam, że wartość sumy z prawej strony jest rzeczywiście ograniczona przez 3, a dokładniej jest nie większa niż

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e \approx 2{,}7182818.$$

Z tego wynika, że wartość $s(n)$ może być przybliżona przez $n! \cdot e$. Pójdźmy krok dalej i obliczmy, jak dobre jest to przybliżenie. Zauważmy, że dla $n \geqslant 1$ mamy

$$n! \cdot e - s(n) = n! \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} =$$
$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots <$$
$$< \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots = e - 2 < 1.$$

Skoro zatem $n! \cdot e$ jest większe od całkowitej liczby $s(n)$, ale nie więcej niż o 1, to części całkowite tych dwóch liczb muszą być takie same. Dzięki temu w nagrodę za naszą wytrwałość dostajemy zwięzły wzór na poszukiwaną liczbę uporządkowań podzbiorów n garnczków:

$$s(n) = \lfloor n! \cdot e \rfloor.$$

Małą Deltę przygotował Tomasz IDZIASZEK