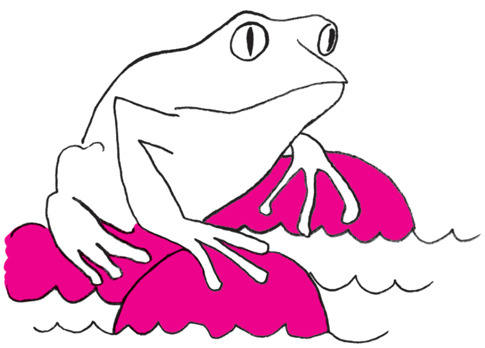
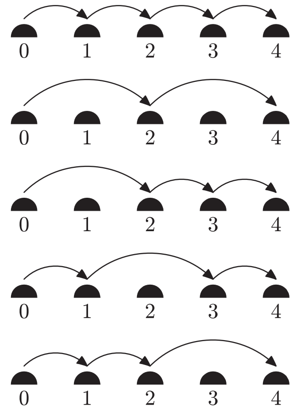
Kombinatoryka i nieskończoność

Wojciech GUZICKI[*]

Kombinatoryka zajmuje się własnościami zbiorów skończonych, w szczególności zagadnieniem zliczania elementów takich zbiorów. Czy może zatem w kombinatoryce znaleźć się miejsce dla nieskończoności? Okazuje się, że tak – pokażę jedno z takich zastosowań nieskończoności: funkcje tworzące. Zacznę od następującego zadania:

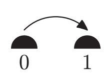
Zadanie. Żaba skacze z kamienia na kamień. Kamienie leżą jeden za drugim i są ponumerowane liczbami naturalnymi od zera; żaba startuje z kamienia zerowego. W jednym skoku potrafi ona przeskoczyć z jednego kamienia na następny lub o dwa kamienie dalej. Żaba może wykonywać kolejne skoki różnych długości. Na przykład, na czwarty kamień może dostać się, skacząc cztery razy na odległość jednego kamienia lub skacząc dwa razy, za każdym razem na odległość dwóch kamieni, lub też skacząc raz na odległość dwóch kamieni i dwa razy na odległość jednego kamienia. Tę ostatnią możliwość może zrealizować na trzy sposoby: skok podwójny może być pierwszym, drugim lub trzecim skokiem. Oto możliwe drogi żaby na czwarty kamień:



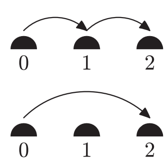


Łącznie ma więc pięć różnych sposobów dostania się na czwarty kamień. A ile istnieje sposobów dostania się na n-ty kamień?

Oznaczmy przez F_n liczbę dróg żaby na n-ty kamień. Oczywiście, $F_1 = 1$. Na kamień z numerem 1 żaba może bowiem dostać się tylko w jeden sposób – ma wykonać jeden pojedynczy skok:



Następnie $F_2 = 2$. Na kamień z numerem 2 żaba może dostać się dwoma sposobami – wykonać dwa skoki pojedyncze lub jeden podwójny:



Zobaczmy teraz, na ile sposobów żaba może się dostać na kamień o numerze $n+2$. Ma ona F_n różnych dróg na kamień o numerze n i F_{n+1} dróg na kamień o numerze $n+1$. Ponieważ ostatni skok żaby jest skokiem podwójnym z kamienia o numerze n lub pojedynczym z kamienia o numerze $n+1$, więc łącznie istnieje $F_n + F_{n+1}$ dróg żaby na kamień $n+2$. A więc $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Zatem na trzeci kamień żaba może dostać się na $1+2=3$ sposoby, na czwarty na $2+3=5$ sposobów i tak dalej. Zauważmy, że jeśli przyjmiemy $F_0 = 1$ (co jest całkiem naturalne: istnieje jeden sposób dostania się na kamień o numerze 0, mianowicie nie robić nic), to okaże się, że $F_2 = F_0 + F_1$. Zatem ciąg (F_n) jest określony wzorami

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{dla } n \geqslant 0.$$

[*]Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Ten ciąg jest dobrze znany w matematyce: jest to tzw. **ciąg Fibonacciego**. Powyższy wzór definiujący ten ciąg jest wzorem **rekurencyjnym**: kolejny wyraz ciągu nie jest zdefiniowany wzorem uzależniającym ten wyraz od indeksu n, ale w zależności od wyrazów poprzednich. Powstaje pytanie, czy możemy znaleźć wzór ogólny, zależny tylko od n. Jedna z metod otrzymywania wzorów ogólnych korzysta z tzw. funkcji tworzących.

Definiujemy funkcję tworzącą dla ciągu Fibonacciego wzorem

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_nx^n.$$

Mamy teraz

$$\begin{aligned}F(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}F_nx^n=F_0+F_1x+\sum_{n=2}^{\infty}F_nx^n=1+x+\sum_{n=2}^{\infty}(F_{n-1}+F_{n-2})x^n=\\&=1+x+\sum_{n=2}^{\infty}F_{n-1}x^n+\sum_{n=2}^{\infty}F_{n-2}x^n=1+x+\sum_{n=1}^{\infty}F_nx^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}F_nx^{n+2}=\\&=1+x+x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}F_nx^n+x^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}F_nx^n=1+x+x\cdot(F(x)-1)+x^2\cdot F(x)=\\&=1+x+xF(x)-x+x^2F(x)=1+xF(x)+x^2F(x).\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy równanie

$$F(x)=1+xF(x)+x^2F(x),$$

z którego dostajemy wzór na $F(x)$:

$$F(x)=\frac{1}{1-x-x^2}.$$

Teraz otrzymaną funkcję tworzącą rozwijamy w szereg potęgowy. W tym celu rozkładamy ułamek

$$\frac{1}{1-x-x^2}$$

na tzw. ułamki proste. Szczegóły obliczeń pominę tutaj; Czytelnik może się natomiast łatwo przekonać (dodając ułamki), że

$$F(x)=\frac{\alpha}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{1-\alpha x}-\frac{\beta}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{1-\beta x},$$

gdzie

$$\alpha=\frac{1+\sqrt5}{2}\quad\text{oraz}\quad\beta=\frac{1-\sqrt5}{2}.$$

Korzystamy teraz ze znanego wzoru na sumę nieskończonego szeregu geometrycznego. Mianowicie dla dowolnej liczby γ i takiej liczby x, że $|\gamma x|<1$, mamy

$$\frac{1}{1-\gamma x}=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma^nx^n.$$

Stąd dostajemy rozwinięcie funkcji $F(x)$ w szereg potęgowy

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_nx^n=\frac{\alpha}{\sqrt5}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^nx^n-\frac{\beta}{\sqrt5}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\beta^nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\sqrt5}\cdot x^n.$$

Porównując współczynniki przy kolejnych potęgach x, dostajemy następujący wzór ogólny:

$$F_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\sqrt5}=\frac{1}{\sqrt5}\cdot\left[\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n+1}\right].$$

Ten wzór jest nazywany **wzorem Bineta**.

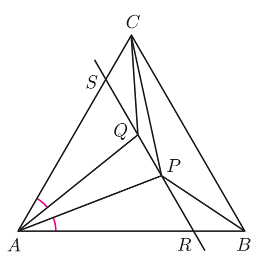
Zauważmy, że w tej metodzie otrzymywania wzoru ogólnego konieczne było rozwijanie funkcji w nieskończony szereg potęgowy. Tak więc nieskończoność została użyta nie tylko w znaczeniu potencjalnym (wzór obowiązuje dla każdej, dowolnie dużej, ale skończonej liczby n), ale w znaczeniu aktualnym: mamy do czynienia z rzeczywiście nieskończonym szeregiem potęgowym.

Rozwiązanie zadania M 1390.
Bez utraty ogólności możemy założyć, że $\measuredangle PAB<\measuredangle PAC$. Odbijmy symetrycznie P względem dwusiecznej kąta A, otrzymując punkt Q. Niech PQ przecina AB i AC odpowiednio w punktach R i S. Oczywiście

$$\measuredangle PAC-\measuredangle PAB=\measuredangle PAQ$$

oraz

$$\measuredangle PBC-\measuredangle PCB=\measuredangle QCB-\measuredangle PCB=\measuredangle PCQ.$$



Wykażemy teraz, że $\measuredangle PAQ>\measuredangle PCQ$. Rozważmy obraz A' punktu A przy symetrii względem RS. Zauważmy, że punkt C leży na zewnątrz okręgu opisanego na trójkącie równobocznym $A'RS$, gdyż $\measuredangle RCS<\measuredangle BCS=60^\circ$. W szczególności, punkt C leży na zewnątrz okręgu opisanego na trójkącie $A'PQ$, gdyż ten okrąg leży wewnątrz poprzedniego. Stąd $\measuredangle PCQ<\measuredangle PA'Q$.