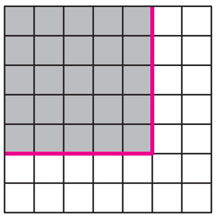
$\sum_{k=1}^{n} k^3$

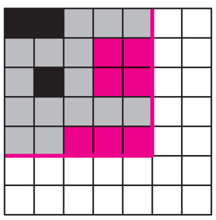
Joanna JASZUŃSKA

Rozważmy szachownicę $n \times n$. Policzmy dwoma niezależnymi sposobami, ile jest na niej prostokątów o bokach wzdłuż linii podziału na kratki.



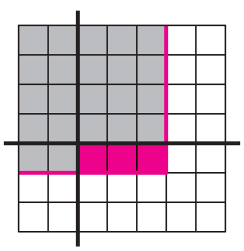
Rys. 1. Szary obszar to piąte naroże, kolorem zaznaczono jego brzeg.

Sposób I. Dla $k = 1, 2, \ldots, n$ nazwijmy *k-tym narożem* szachownicy jej lewą górną część o rozmiarach $k \times k$, a *brzegiem* tego naroża nazwijmy dwa jego boki: prawy i dolny (rys. 1). Prostokąty zliczajmy wedle tego, w którym narożu się mieszczą. Prostokąt, który mieści się w k-tym narożu, mieści się też we wszystkich większych narożach. Aby nie liczyć takich prostokątów wielokrotnie, dla każdego naroża liczmy tylko te, które dotykają jego brzegu (rys. 2). Wtedy każdy prostokąt policzymy dokładnie raz – tylko przy najmniejszym narożu, w którym się mieści.



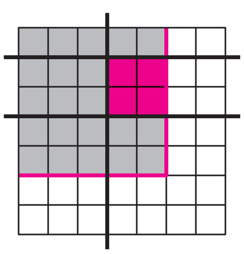
Rys. 2. Dla piątego naroża liczymy kolorowe prostokąty, natomiast nie liczymy czarnych, bo mieściły się one w mniejszych narożach.

Ile prostokątów mieści się w k-tym narożu i dotyka jego brzegu? Taki prostokąt może dotykać obydwu boków z brzegu albo tylko jednego z nich. Prostokąt pierwszego z tych rodzajów (rys. 3) można utożsamić z poziomą prostą wyznaczającą jego górny bok i pionową wyznaczającą bok lewy. Tego typu prostokątów jest więc k^2, bo prostą w każdym z kierunków można wybrać na k sposobów.



Rys. 3

Każdy prostokąt dotykający tylko prawego boku naroża (rys. 4) można utożsamić z prostą pionową wyznaczającą lewy bok prostokąta (jest k możliwych takich prostych) oraz z parą różnych prostych poziomych wyznaczających jego poziome boki (par jest $\binom{k}{2}$, bo wybieramy dwie proste spośród k). Takich prostokątów jest więc $k \cdot \binom{k}{2}$. Prostokątów dotykających tylko dolnego boku naroża jest tyle samo.



Rys. 4

Wszystkich prostokątów w k-tym narożu, dotykających jego brzegu, jest więc

$$k^2 + 2k \cdot \binom{k}{2} = k^2 + 2k \cdot \frac{k(k-1)}{2} = k^2 + k^2(k-1) = k^3.$$

Wobec tego wszystkich prostokątów na szachownicy jest $\sum_{k=1}^{n} k^3$. □

Sposób II. Każdy prostokąt można utożsamić z dwiema parami prostych zawierających jego boki. Oznacza to, że prostokątów jest tyle, na ile sposobów można na szachownicy wybrać parę różnych prostych pionowych i parę różnych prostych poziomych. Prostych w każdym z kierunków jest $n+1$, wybrać dwie można na $\binom{n+1}{2}$ sposobów, zatem prostokątów jest $\binom{n+1}{2}^2$. □

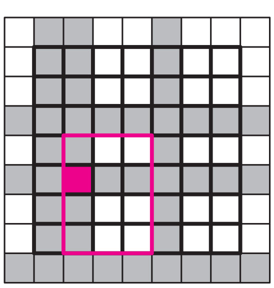
Wniosek. Z powyższych dwóch rozwiązań wynika równość

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \binom{n+1}{2}^2, \quad \text{czyli} \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

W połączeniu ze znanym wzorem $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ uzyskujemy $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.

Jaka jest suma pól wszystkich rozważanych prostokątów?

Rozwiązanie. Każdy prostokąt „wnosi” do sumy pól tyle, z ilu jednostkowych kratek szachownicy się składa. Suma pól równa jest więc liczbie par $\langle$*prostokąt, należąca do niego kratka*$\rangle$. Ile jest takich par?



Rys. 5. Szarym wypełnieniem oznaczono wybrane wiersze i kolumny, kolorem – prostokąt i jego wyróżnioną kratkę.

Dobudujmy do naszej szachownicy $n \times n$ po jednej pomocniczej kolumnie z lewej i z prawej oraz po jednym wierszu, na górze i na dole. Otrzymujemy szachownicę $(n+2) \times (n+2)$. Wybierzmy trzy różne kolumny (można to zrobić na $\binom{n+2}{3}$ sposoby) oraz trzy różne wiersze (na tyle samo sposobów). Taki wybór można utożsamić z wybraniem prostokąta i jego kratki: prostokąt to obszar pomiędzy pierwszą a trzecią z wybranych kolumn oraz pomiędzy pierwszym a trzecim z wybranych wierszy, zaś jego wyróżniona kratka jest na skrzyżowaniu środkowej z wybranych kolumn ze środkowym z wybranych wierszy (rys. 5).

Wobec tego par $\langle$*prostokąt, należąca do niego kratka*$\rangle$ jest $\binom{n+2}{3}^2$ i taka jest też szukana suma pól wszystkich prostokątów na szachownicy. □