Ciąg Fibonacciego

Joanna JASZUŃSKA

Ciąg Fibonacciego definiujemy następująco:

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1 \quad \text{oraz} \quad f_n = f_{n-2} + f_{n-1} \quad \text{dla } n \geqslant 3.$$

Każdy wyraz ciągu, począwszy od trzeciego, jest sumą dwóch poprzednich, kolejno otrzymujemy więc: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$ Spośród mnóstwa interesujących faktów związanych z tym ciągiem uzasadnimy kilka, które można udowodnić, odpowiednio ustawiając pewne figury.

1. Wykaż, że dla każdego naturalnego $n \geqslant 1$ zachodzą następujące równości:

(a) $f_1 + f_3 + f_5 + \ldots + f_{2n-1} = f_{2n}$,
(b) $f_2 + f_4 + f_6 + \ldots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$,
(c) $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \ldots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$.

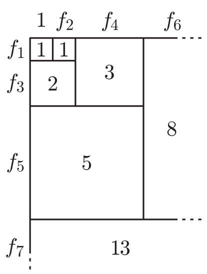
2. Podziel płaszczyznę na kwadraty, z których każde dwa są różnej wielkości.

3. Podziel kwadrat na mniejsze kwadraty, z których każde dwa są różnej wielkości.

4. Na ile różnych sposobów można ułożyć chodnik o długości n i szerokości 1, mając do dyspozycji duży zapas płyt o rozmiarach 2×1 oraz 1×1?

5. Wykaż, że $f_{n+1}f_k + f_n f_{k-1} = f_{n+k}$ dla dowolnych liczb naturalnych $n \geqslant 1$, $k \geqslant 2$.

Rozwiązania



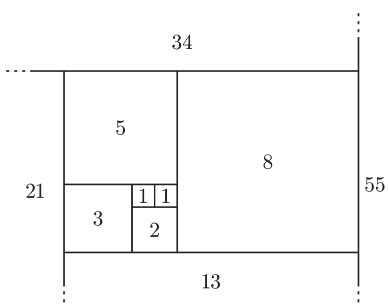
Rys. 1. Liczby wewnątrz kwadratów oznaczają długości ich boków.

R1. Pewną liczbę kwadratów o bokach równych początkowym wyrazom ciągu Fibonacciego ustawmy jak na rysunku 1, po kolei dobudowując kwadraty na przemian po prawej stronie i na dole. Na każdym etapie tej konstrukcji powstaje prostokąt, bo $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$ – następny kwadrat „pasuje" do dwóch poprzednich.

(a) Jeśli ostatni kwadrat dobudowano na dole i ma on bok długości f_{2n-1}, to cały prostokąt ma taką właśnie szerokość, a wysokość równą następnemu wyrazowi ciągu, czyli f_{2n}. Jednocześnie wysokość ta jest równa $f_1 + f_3 + f_5 + \ldots + f_{2n-1}$.

(b) Analogicznie, jeśli ostatni kwadrat ustawiono po prawej i ma bok długości f_{2n}, to prostokąt ma szerokość równą f_{2n+1} i zarazem równą $1 + f_2 + f_4 + \ldots + f_{2n}$.

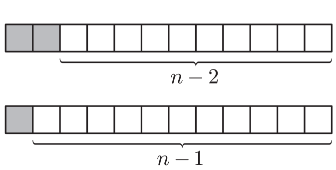
(c) Jeśli jako ostatni ustawiono kwadrat o boku długości f_n, to prostokąt ma taką właśnie szerokość lub wysokość, a drugi z wymiarów równy f_{n+1}, więc ma pole $f_n f_{n+1}$. Jednocześnie pole to jest równe $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \ldots + f_n^2$. □



Rys. 2

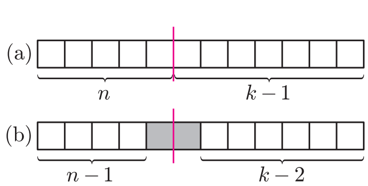
R2. Zmodyfikujmy rysunek 1, ustawiając kwadraty o bokach równych $f_1, f_2, f_3, \ldots$ kolejno po prawej, na dole, po lewej, na górze, znów po prawej itd., jak na rysunku 2. Żądany podział płaszczyzny uzyskamy, dzieląc jeden z dwóch kwadratów o boku długości 1 tak, jak w zadaniu 3. □

Wskazówka 3. Podziały na 24 kwadraty i na 21 (na mniej się nie da) pokazano np. na stronie `http://mathworld.wolfram.com/PerfectSquareDissection.html`.



Rys. 3. Możliwe początki chodnika długości n.

R4. Oznaczmy tę liczbę sposobów przez c_n. Dla $n \geqslant 3$ na początku chodnika możemy położyć płytę 2×1 (rys. 3), a następnie na c_{n-2} sposobów ułożyć resztę (chodnik o długości $n-2$); możemy też zacząć od płyty 1×1 i wtedy na c_{n-1} sposobów ułożyć resztę. Stąd $c_n = c_{n-2} + c_{n-1}$ dla $n \geqslant 3$. Otrzymany wzór jest taki sam, jak dla ciągu Fibonacciego. Nietrudno sprawdzić, że $c_1 = 1 = f_2$ oraz $c_2 = 2 = f_3$, uzyskujemy więc wniosek, że $c_n = f_{n+1}$. □



Rys. 4. Cięcie chodnika długości $n+k-1$ na części o długościach n oraz $k-1$.

R5. Ile spośród chodników o długości $n+k-1$, takich jak opisano w poprzednim zadaniu, można rozciąć na chodnik o długości n (od lewej strony) oraz chodnik o długości $k-1$ (po prawej stronie) bez rozcinania poszczególnych płyt (rys. 4(a))? Takich chodników jest tyle, na ile sposobów można ułożyć po lewej stronie chodnik długości n, a po prawej chodnik długości $k-1$. Z poprzedniego zadania wiemy, że możliwości tych jest po lewej f_{n+1}, po prawej f_k, więc łącznie $f_{n+1}f_k$.

Cięcie chodnika wymaga rozcinania płyty, gdy w miejscu podziału leży płyta 2×1 (rys. 4(b)). Takich chodników jest $f_n f_{k-1}$: układamy od lewej kolejno chodnik długości $n-1$, następnie płytę 2×1, a po prawej chodnik długości $k-2$.

Wszystkich chodników, jak wiemy z poprzedniego zadania, jest f_{n+k} i każdy z nich da się rozciąć w opisany sposób lub nie, stąd $f_{n+1}f_k + f_n f_{k-1} = f_{n+k}$. □