Wojnę powiedzieć myśli serce moje, Do której miecza nie trzeba ni zbroje

Bartłomiej BZDĘGA

Rozważamy tutaj gry z udziałem dwóch graczy, którzy podczas rozgrywki mają pełną informację na temat tego, co dzieje się na planszy. Każda gra ma ściśle określone reguły, w tym cel. Gracz, który jako pierwszy go osiągnie, wygrywa, a jego przeciwnik przegrywa, przy czym nie musi być to ten sam cel dla obu graczy.

Interesuje nas, jak grać, żeby wygrać. *Strategią* nazywamy przepis na to, jak grać; formalnie jest to funkcja, która każdej pozycji w grze przypisuje ruch, jaki należy wykonać. Poszukujemy *strategii wygrywającej*, czyli takiej, która jednemu z graczy zapewnia zwycięstwo, niezależnie od tego, co zrobi drugi.

W niektórych grach można znaleźć *strategie ruchów odpowiadających*, którym poświęcony jest niniejszy odcinek kącika. Wskazują one właściwy ruch w zależności praktycznie tylko od tego, co zrobił przeciwnik w ruchu poprzednim. Zazwyczaj wiążą się one z różnego rodzaju symetriami. Idea jest prosta: ten, który ma odpowiedź na każdy ruch przeciwnika, nie może przegrać.

Wskazując taką strategię, należy uzasadnić, że ruch odpowiadający jest zawsze możliwy do wykonania (nie łamie zasad) i nie powoduje natychmiastowej przegranej. Ponadto należy się jeszcze upewnić, czy gra się kiedyś zakończy, bo nie zawsze jest to oczywiste.

Zadania. *W każdym zadaniu opisana jest gra dwuosobowa, w której gracze wykonują na zmianę ruchy. Należy wskazać strategię wygrywającą dla odpowiedniego gracza.*

1. Gracze stawiają pionki na szachownicy 8×8, jeden czarne, a drugi białe. Żadne dwa pionki tego samego koloru nie mogą stać na polach mających wspólny bok lub wierzchołek. Przegrywa ten, kto nie może wykonać ruchu.
2. Gracze stawiają hetmany na szachownicy o wymiarach 9×9, przy czym hetmana można postawić wyłącznie na wolnym polu, którego nie atakuje żaden z hetmanów ustawionych wcześniej. Przegrywa gracz, który nie może wykonać ruchu.
3. Łańcuch ma 25 ogniw. Ruch polega na rozcięciu i odrzuceniu jednego z ogniw, ale tak wybranego, by liczba łańcuchów zwiększyła się. Przegrywa ten gracz, który nie może wykonać ruchu.
4. Dana jest czekolada o wymiarach m na n kostek. Dwaj gracze na zmianę łamią czekoladę wzdłuż linii prostej, nie uszkadzając kostek. Po złamaniu czekolady gracz wybiera jeden z dwóch otrzymanych kawałków i zjada go, a gra toczy się dalej na pozostałej części czekolady. Wygrywa ten, kto odda przeciwnikowi ostatnią kostkę.
5. Gracze stawiają na szachownicy o wymiarach 8×8 skoczki, przy czym gracz pierwszy stawia zawsze jednego, a gracz drugi trzy. Skoczki muszą stać na różnych polach i żadne dwa nie mogą się atakować. Przegrywa ten, kto nie może wykonać ruchu.
6. Na stole leżą dwa stosy monet: n srebrnych i n złotych. Ruch polega na zabraniu pewnej liczby monet z jednego lub dwóch stosów, ale złotych monet musi pozostać co najmniej tyle, co srebrnych. Ponadto, jeśli zabieramy monety z obu stosów, to po wykonaniu ruchu muszą one zawierać po tyle samo monet. Wygrywa gracz, który pozostawi na stole jedną złotą monetę i żadnej srebrnej.
7. Pierwszy gracz pisze na tablicy kolejno litery A lub B, jedną na jeden ruch. Drugi może w swoim ruchu zamienić miejscami dowolne dwie litery napisanego słowa albo może nic nie zmieniać. Gra kończy się, gdy każdy z graczy wykona n ruchów. Drugi gracz wygrywa, gdy powstałe słowo n-literowe jest palindromem; w przeciwnym razie wygrywa pierwszy.
8. Prostopadłościan o wymiarach $a \times b \times c$ złożony jest z abc sześcianików o wymiarach $1 \times 1 \times 1$. Ruch polega na przebiciu tego prostopadłościanu igłą na wylot, równolegle do wybranej krawędzi. W czasie ruchu zostaje przebitych a, b lub c sześcianików. Żaden sześcianik nie może być przebity dwa razy, a przegrywa gracz, który jako pierwszy nie może wbić igły zgodnie z podanymi prawidłami.

Rozwiązania

1. Niech ℓ będzie osią symetrii szachownicy, równoległą do pewnych dwóch jej boków. Gracz drugi ma strategię wygrywającą – każdy swój pionek stawia symetrycznie do postawionego w poprzednim ruchu pionka przeciwnika względem prostej ℓ.

2. Gracz pierwszy ma strategię wygrywającą – powinien postawić pierwszego hetmana na środkowym polu, a następnie odpowiadać środkowosymetrycznie względem tego pola.

3. Pierwszy gracz w pierwszym ruchu rozcina środkowe ogniwo. W ten sposób tworzą się dwa łańcuchy po 12 ogniw. Cokolwiek gracz drugi zrobi z jednym z nich, gracz pierwszy odpowiada identycznym ruchem na drugim łańcuchu.

4. Kluczowa jest obserwacja, że czekoladę kwadratową (czyli o wymiarach $a \times a$) można otrzymać tylko z niekwadratowej. Zatem receptą na zwycięstwo jest tworzenie kwadratu, o ile to możliwe. Jeśli $m \neq n$, to zwycięży pierwszy gracz, a w przeciwnym razie – drugi.

5. Gracz drugi wygrywa – stawia swoje trzy skoczki tak, by razem z ustawionym w poprzednim ruchu przez gracza pierwszego wyznaczały one prostokąt, którego środkiem jest środek szachownicy i którego boki są równoległe do jej brzegów.

6. W pierwszym ruchu gracz pierwszy zabiera jedną srebrną monetę. Po każdym ruchu drugiego gracza, pierwszy może doprowadzić do tego, aby na stole było o jedną więcej złotych monet niż srebrnych.

7. Jeśli n jest liczbą parzystą, to gracz pierwszy wygrywa, pisząc raz literę A i $n-1$ razy literę B. Gdy $n = 2k-1$, to wygrywa gracz drugi w następujący sposób. Przez pierwszych k ruchów nie robi nic, a po napisaniu litery $(k+i)$-tej sprawdza, czy jest ona taka sama jak $(k-i)$-ta. Jeśli tak, to nic nie robi, a jeśli nie, to literę k-tą zamienia z tą z liter $k \pm i$, która jest od niej inna.

8. Jeśli co najmniej dwie z liczb a, b, c są parzyste, to wygrywa drugi gracz, wykonując ruchy środkowosymetryczne względem środka prostopadłościanu do ruchów gracza pierwszego. Jeśli są co najmniej dwie nieparzyste, powiedzmy a i b, to strategię wygrywającą ma gracz pierwszy. Najpierw wbija igłę w środek ściany $a \times b$ (ta igła przechodzi przez środek prostopadłościanu), a następnie odpowiada środkowosymetrycznie względem środka prostopadłościanu.