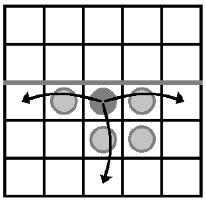
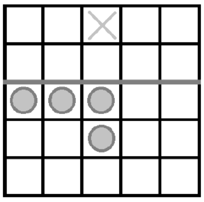
1, 2, 3, 4, ...

Kamila ŁYCZEK



Rys. 1. Możliwe ruchy ciemnoszarego pionka

Conway's Soldiers to jednoosobowa łamigłówka, w której żołnierze (pionki) przedostają się na terytorium wroga i chcą wkroczyć jak najdalej. Na nieskończonej szachownicy, z zaznaczoną „na środku” poziomą granicą, pionki przeskakują jeden nad drugim. Dokładniej: ruch polega na przeskoczeniu pionkiem nad innym znajdującym się na sąsiadującym polu – tylko poziomo lub pionowo – i zdjęciu pionka, który został przeskoczony.



Rys. 2. Konfiguracja pionków, z której można dotrzeć do pola zaznaczonego krzyżykiem.

Początkowo wszystkie pionki ustawione są poniżej granicy (na rysunkach zaznaczona na szaro). Celem gry jest dostać się jak najdalej poza granicę. Należy znaleźć takie początkowe ustawienia pionków (dowolnie wielu), żeby przynajmniej jeden mógł znaleźć się 1, 2, 3, 4, ... pola za granicą. Rysunek 2 przedstawia ustawienie, które umożliwia przekroczenie granicy o 2 pola. Zadanie: ile najmniej pionków jest potrzebnych, żeby przedostać się o 3 i 4 pola od granicy, pozostawiamy Czytelnikowi.

Ciekawe zadania o niezmiennikach i półniezmiennikach można znaleźć w artykułach K. Chełmińskiego i W. Pompego (Δ^7_{96}, Δ^8_{96}). O niezmienniku do badania węzłów jest artykuł J. Gładysza (Δ^1_{18}).

A teraz zajmiemy się sprawą poważniejszą: **jak przedostać się 5 pól za granicę?** Żeby zmierzyć się z problemem, wytoczymy oręże, jakim są *półniezmienniki*. *Niezmiennikiem* nazywamy pewną własność, która nie ulega zmianie podczas wykonywania procesu (odsyłamy do zadania na marginesie). Natomiast *półniezmiennik* to własność zmieniająca się w ściśle określony sposób (na przykład nie rośnie lub nie maleje).

Polom szachownicy przypiszemy wartości liczbowe i po każdym ruchu będziemy sumować liczby na zajętych polach. Chcemy znaleźć takie wartości, żeby ta suma (nazwijmy ją *wartością gry*) pozostawała stała lub żeby malała po każdym ruchu. Zauważmy, że jeden ruch powoduje, że na planszy jest o jeden pionek mniej, tak że wymaganie nie jest całkiem sztuczne.

x^2	x	1	x	x^2
x^3	x^2	x	x^2	x^3
x^4	x^3	x^2	x^3	x^4
x^5	x^4	x^3	x^4	x^5

Rys. 3

Oznaczmy jedynką pole, do którego chcemy dotrzeć – nasz cel. Pozostałym polom przypiszmy x^k (dla każdego x, który ustalimy później) w taki sposób, że k jest liczbą wierszy i kolumn, o które to pole jest odległe od „1” (rys. 3).

Autorka niniejszego tekstu o grze *Conway's Soldiers* dowiedziała się z książki o chłopcu, który lubił sprowadzać otoczenie, w tym również ludzi, do liczb, a najlepiej jednej (Mark Haddon, *Dziwny przypadek psa nocną porą*).

Możemy wyróżnić trzy typy ruchów w grze (poniżej zakładamy, że pionek skaczący startuje z pola x^k):

1. Przybliżający do „1” – gdy pionek skaczący zbliża się do pola 1. Wartość gry zmieni się wtedy o $x^{k-2} - x^{k-1} - x^k$ (x^{k-2} to pole, na którym wylądował pionek skaczący, a x^{k-1}, x^k to pola, z których zniknęły pionki).
2. Neutralny – pionek skaczący pozostaje w tej samej odległości od „1” co przed skokiem. Wartość gry zmienia się o $-x^{k-1}$ (pole, na którym stał przeskoczony pionek).
3. Oddalający od „1” – wartość gry zmienia się o $x^{k+2} - x^{k+1} - x^k$.

Sprecyzujmy wymagania wobec x, żeby wartość gry nie zmieniała się wtedy, gdy przybliżamy się do „1”, czyli rozwiążmy dla $k \geqslant 2$ równanie

$$(*) \qquad x^{k-2} - x^{k-1} - x^k = 0.$$

Zadanie
Na dziesięciu drzewach, rozmieszczonych na okręgu, siedzi dziesięć wiewiórek (po jednej na każdym drzewie). Od czasu do czasu dwie wiewiórki przeskakują na sąsiednie drzewa. Czy wszystkie wiewiórki mogą spotkać się na jednym drzewie?
Rozwiązanie
Żeby znaleźć odpowiedź, można pomalować drzewa na dwa kolory, tak żeby każde dwa sąsiadujące drzewa były w innych kolorach. Parzystość liczby wiewiórek na drzewach w tym samym kolorze to w tym przypadku niezmiennik. Zaczynamy od 5 i 5 – niezależnie od tego, jak wiewiórki będą skakać (ale zgodnie z zasadą opisaną w zadaniu), ta parzystość się nie zmieni, czyli nie uzyskamy 10 i 0.

Mamy dwóch kandydatów $x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Jeden jest zdecydowanie lepszy od drugiego. Dla ujemnej wartości x ruch neutralny może powodować zwiększanie wartości gry, a przecież tego nie chcieliśmy. Inny powód jest taki, że w dalszej części będziemy się starali wypełnić pionkami cały nieskończony wiersz szachownicy, co w przypadku, gdy $|x| > 1$, oznaczałoby sumowanie nieskończonego ciągu geometrycznego, o ilorazie większym niż 1. Kłopotliwie... Bezpieczniej jest wybrać $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, oznaczmy tę wartość przez ϕ. Zauważmy, że ϕ spełnia wcześniejsze wymaganie o tym, że w każdym ruchu wartość gry nie może wzrastać – wartość gry maleje, gdy wykonujemy ruch oddalający ($\phi^{k-2} - \phi^{k-1} - \phi^k < 0$), przy ruchu neutralnym również.

Zachodzą następujące równości

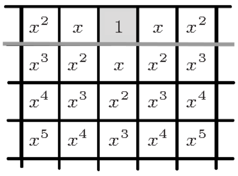
$$\phi^2 = 1 - \phi, \qquad \phi^3 = \phi - \phi^2, \qquad \phi^4 = \phi^2 - \phi^3 \qquad \cdots$$

Z powyższego otrzymujemy $\phi^2 + \phi^3 + \phi^4 + \dots = 1$ (dodaliśmy prawe i lewe strony powyższych równań). Mamy również

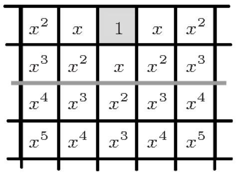
$$\dots + \phi^3 + \phi^2 + \phi + \phi^2 + \phi^3 + \dots = \phi + 2(\phi^2 + \phi^3 + \dots).$$

Mając planszę ponumerowaną konkretnymi liczbami i znając parę zależności dla tych wartości, obliczmy wartość gry w sytuacji, gdyby wszystkie pola (czyli nieskończenie wiele!) poniżej granicy były zajęte przez pionki, a naszym celem byłoby dostanie się tuż nad granicę (rys. 4). Oznaczmy wartość takiej konfiguracji przez S_1

$$S_1 = \big(\phi + 2(\phi^2 + \phi^3 + \dots)\big)\,(1 + \phi + \phi^2 + \phi^3 + \dots)$$



Rys. 4. S_1



Rys. 5. S_2

Korzystając z tego, że $\phi^2 + \phi^3 + \phi^4 + \dots = 1$, dostajemy

$$S_1 = (\phi + 2 \cdot 1)\,(1 + \phi + 1) = (2 + \phi)^2 = 4 + 4\phi + \phi^2 = \\ = 5 + 2\phi,$$

gdyż $\phi^2 = 1 - \phi$.

Teraz jako cel wyznaczmy sobie pole oddalone od granicy o dwa i ponownie zapełnijmy pionkami wszystkie pola poniżej granicy

$$S_2 = \phi(5 + 3\phi) = 5\phi + 3\phi^2 = 5\phi + 3(1 - \phi) = 2\phi + 3.$$

Analogicznie

$$S_3 = \phi(2\phi + 3) = 2\phi^2 + 3\phi = 2(1 - \phi) + 3\phi = 2 + \phi,$$
$$S_4 = \phi(2 + \phi) = 2\phi + \phi^2 = 2\phi + 1 - \phi = \phi + 1,$$
$$S_5 = \phi(\phi + 1) = \phi^2 + \phi = 1 - \phi + \phi = 1.$$

S_5 to wartość gry w przypadku, gdy naszym celem jest dojście do pola oddalonego od granicy o 5, ma to, oczywiście, związek z początkowym pytaniem. Ponieważ i tak wypełniamy wszystkie pola poniżej granicy na nieskończonej szachownicy, to ulokowanie „1" w tym czy w innym miejscu (ale 5 pól od granicy) niczego nie zmienia.

Cóż wynika z tego, że $S_5 = 1$? Oznacza to tyle, że w tej grze nie da się dojść pionkami na żadne pole oddalone od granicy o 5! Dla skończonej liczby pionków wartość początkowej konfiguracji będzie mniejsza niż 1, a ponieważ wartość nie może wzrosnąć po ruchu (tak dobraliśmy wartość ϕ), to startując z ustawienia o wartości mniejszej niż 1, nigdy nie osiągniemy pola „1".

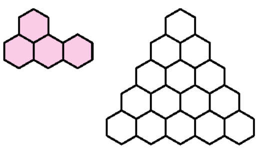
Źródło:
E. Berlekamp, J. Conway and R. Guy, *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, 2004

Zadania

Redaguje Łukasz BOŻYK

M 1573. Wewnątrz kwadratu jednostkowego $\mathcal{K}$ znajduje się wielokąt wypukły $\mathcal{W}$ o polu większym od $\frac{1}{2}$. Wykazać, że wewnątrz wielokąta $\mathcal{W}$ można wskazać odcinek o długości $\frac{1}{2}$ równoległy do boku kwadratu $\mathcal{K}$.
Rozwiązanie na str. 25

M 1574. Dodatnią liczbę całkowitą n nazwiemy *podkwadratową*, jeżeli $n+1$ jest kwadratem liczby całkowitej. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele par liczb podkwadratowych o tej własności, że ich suma oraz iloczyn także są podkwadratowe.
Rozwiązanie na str. 21



M 1575. *Płytką* nazwiemy pokazaną na rysunku figurę złożoną z czterech sześciokątów foremnych o boku 1 oraz dowolną figurę otrzymaną z niej przez obrót lub symetrię. Z kolei *n-trójkątem* nazwiemy trójkątny układ tworzony przez $1+2+\ldots+n$ sześciokątów foremnych o boku 1 (na rysunku pokazano 5-trójkąt). Znaleźć wszystkie dodatnie liczby całkowite n o tej własności, że z pewnej liczby płytek można ułożyć n-trójkąt.
Rozwiązanie na str. 11

Przygotował Michał NAWROCKI

F 957. Piłkarz zatrzymuje nogą piłkę poruszającą się w jego kierunku z prędkością $v = 10\,\mathrm{m/s}$. Znaleźć prędkość u, z jaką powinna poruszać się noga piłkarza, aby uderzająca w nią piłka zatrzymała się. Przyjąć, że masa piłki jest dużo mniejsza od masy nogi piłkarza, a zderzenie jest całkowicie sprężyste.
Rozwiązanie na str. 8

F 958. Na szalkę wagi sprężynowej o masie M spada z pewnej wysokości h kulka o masie m ($M \gg m$). Współczynnik sprężystości sprężyny wynosi k. Znaleźć odległość Δx punktu, do którego szalka wychyli się z położenia początkowego i wokół którego będzie wykonywała drgania. Przyjąć, że uderzenia kulki w szalkę są doskonale sprężyste.
Rozwiązanie na str. 21