

# Jak uczciwie wygrywać w Blackjaku?

Rafał MARKS\*

\*doktorant, Wydział Matematyki,  
Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet  
Warszawski

Czy można ograć kasyno? Nałogowi gracze zastanawiają się nad tym problemem od dawna. Wszystkie gry w kasynie mają ujemną wartość oczekiwaną dla klienta. Przynajmniej tak się ludziom wydawało aż do lat 60., kiedy ukazało się kilka książek o tym, jak można, stosując odpowiednią strategię, uzyskać dodatnią wartość oczekiwaną w grze Blackjack. To ogromnie spopularyzowało grę i paradoksalnie okazało się korzystne dla branży hazardowej. Mechanizm został przedstawiony w filmie „21”, jednak bez żadnych szczegółów. W tym artykule przedstawię dokładniej, jak ta strategia działa.

Na początek wyjaśnię pokrótce podstawowe zasady gry. Gra się przy użyciu talii kart. Chodzi o to, żeby zbierać jak najwięcej punktów, ale nie więcej niż tytułowe 21. Błotki dają tyle punktów, ile wynosi ich wartość, figury liczą się po 10, a As jest kartą specjalną – liczy się za 1 lub 11, w zależności od tego, co jest dla nas korzystniejsze. Dwóch graczy dobiera karty tak długo, aż spasują. Wynik gracza to suma punktów z kart lub 0 w przypadku, gdy suma jest większa niż 21 (przekroczenie 21 nazywamy „fura”). Jak gra przebiega w kasynie? Gracz gra przeciwko krupierowi. Na początku krupier odkrywa jedną swoją kartę. Potem gracz dobiera karty. W każdym momencie ma dwie możliwości: dobrać (*Hit*, *H*) lub spasować (*Stand*, *S*). Gdy gracz przekroczy 21, automatycznie przegrywa. Jeśli spasuje przed osiągnięciem 21, dobiera krupier. Gra on strategią taką, że dobiera kolejną kartę wtedy i tylko wtedy, gdy ma 16 lub mniej punktów. Na koniec porównujemy wyniki gracza i krupiera (o ile ten drugi nie przekroczył 21, wtedy gracz wygrywa automatycznie). Wygrywa ten, kto ma więcej punktów, możliwy jest też remis. Specjalnie traktowany jest tzw. blackjack (BJ), czyli 21 złożone z dwóch kart (As z dziesiątką lub figurą). Przed grą gracz deklaruje stawkę (np. 1 złoty), którą przegrana strona wypłaci wygranej.

W rzeczywistości kasyno daje graczowi dodatkowe możliwości poza *Hit* i *Stand*.

Grając taką samą strategią jak krupier, gracz w każdej grze ma wartość oczekiwaną około  $-6\%$ , tzn. za każde postawione 100 złotych traci średnio 6 złotych w jednej grze. Skąd się to bierze? Kasyno wygrywa również w sytuacji, gdy obaj gracze przekroczą 21 (gdy gracz przekroczy, to krupier nawet nie odkrywa swoich kart).

Zastanówmy się, jak można tę przewagę zredukować. Pierwszym pomysłem jest zastosowanie innej strategii prostej, tzn. dociągać karty, aż osiągniemy jakąś założoną wcześniej liczbę punktów, np. 15. W ten sposób nie da się jednak zniwelować przewagi kasyna, można ją co najwyżej powiększyć. Ze strategii prostych najlepszą jest ta, którą stosuje krupier.

Spróbujmy wykorzystać fakt, że krupier odsłania nam swoją pierwszą kartę. Wpływ tej karty na wynik krupiera obrazuje poniższa tabela, w której zawarłem prawdopodobieństwa tego, że krupier osiągnie dany wynik, jeśli znamy jego pierwszą kartę:

Karta krupiera	17	18	19	20	21	BJ	Fura
<b>A</b>	0,13	0,13	0,13	0,13	0,05	0,31	0,12
<b>2</b>	0,14	0,13	0,13	0,12	0,12	0	0,35
<b>3</b>	0,14	0,13	0,13	0,12	0,11	0	0,37
<b>4</b>	0,13	0,13	0,12	0,12	0,11	0	0,39
<b>5</b>	0,12	0,12	0,12	0,11	0,11	0	0,42
<b>6</b>	0,17	0,11	0,11	0,1	0,1	0	0,42
<b>7</b>	0,37	0,14	0,08	0,08	0,07	0	0,26
<b>8</b>	0,13	0,36	0,13	0,07	0,07	0	0,24
<b>9</b>	0,12	0,12	0,35	0,12	0,06	0	0,23
<b>10</b>	0,11	0,11	0,11	0,34	0,03	0,08	0,21

Widzimy, że gdy krupier ma kartę „środkową” (3, 4, 5 lub 6), to ma spore prawdopodobieństwo fury. Bierze się to z tego, że w talii występuje najwięcej





### Rozwiązanie zadania F 949.

Prędkość odbijającej się cegły w momencie, gdy odrywa się ona od piłki, jest równa prędkości najwyższego punktu piłki. Oznaczmy ją przez  $v$ . Po odbiciu cegła porusza się swobodnie w polu siły ciężkości i zgodnie z zasadą zachowania energii mamy  $Mv^2/2 = MgH$ , gdzie  $H$  to wysokość, na którą podskoczy cegła, a  $M$  – masa cegły. Stąd znajdujemy

$v = \sqrt{2gH}$ . Prędkość najniższego punktu piłki w momencie, gdy cegła odrywa się od piłki, wynosi zero. Stąd, z dobrym przybliżeniem, prędkość środka piłki wynosi  $v/2$ . Dla piłki mamy więc z zasady zachowania energii  $m(v/2)^2/2 = mgh$ , gdzie  $h$  to wysokość, na którą podskoczy piłka, a  $m$  – masa piłki, i stąd  $h = H/4 \approx 25$  cm.

kart o wartości 10 (figury i dziesiątki), więc, na przykład, z 6 często otrzymamy 16, a stąd z kolei już tylko mały krok do przekroczenia 21.

Nasza strategia będzie polegać na tym, że w sytuacji, gdy krupier z dużym prawdopodobieństwem przekroczy 21, będziemy stosować strategię pasowania jak najszybciej, a w przeciwnym przypadku strategię krupiera. Tabela poniżej pokazuje, która ze strategii prostych jest optymalna przy znanej karcie krupiera (strategią prostą  $n$  nazywam strategię polegającą na dobieraniu kart, aż uzyskam wynik co najmniej  $n$ , a potem pasowaniu).

Karta krupiera	Strategia	Karta krupiera	Strategia
<b>A</b>	17	<b>6</b>	12
<b>2</b>	14	<b>7</b>	17
<b>3</b>	13	<b>8</b>	17
<b>4</b>	13	<b>9</b>	17
<b>5</b>	12	<b>10</b>	17

Ta idea stoi u podstaw tzw. *strategii podstawowej*. Dokładny jej opis (z uwzględnieniem dodatkowych możliwości dawanych przez kasyno graczowi) można znaleźć np. w Wikipedii. Gdy gramy strategią podstawową, przewaga kasyna spada do około 0,5%. To nas jeszcze nie zadowala. Chcielibyśmy spowodować, że to gracz, a nie kasyno, będzie miał przewagę, tzn. gra będzie miała dodatnią wartość oczekiwaną z punktu widzenia klienta.

Szansę na pokonanie kasyna daje nam fakt, że w rzeczywistości nie jest tak, że każde rozdanie rozgrywane jest od nowa przetasowaną talią. Kolejne rozdanie odbywa się kartami, które nie zostały użyte w poprzednim. Bardzo uważny obserwator może zatem zapamiętać, jakie karty zostały w talii. Na tej podstawie można zmodyfikować strategię.

Przykład: powiedzmy, że w talii pozostały w dużej większości karty o wartości 10. Wówczas, gdy odkrytą kartą krupiera jest 2, 3, 4, 5 lub 6, mamy niemal pewność, że będzie miał furę (gdyż może dobrać praktycznie tylko 10, a poniżej 17 się nie zatrzyma). W takim przypadku będziemy tylko unikać przekroczenia i wygrywać z dużą pewnością.

W rzeczywistości zapamiętanie dokładnie, jakie karty „schodziły” (jak np. w brydżu) jest niemożliwe. Stosuje się uproszczone metody obliczania, jak dobra jest dana talia dla gracza. Najprostszy stosowany sposób to:

- 2, 3, 4, 5, 6 mają wartość +1,
- 7, 8, 9 mają wartość 0,
- As, 10 i figury mają wartość –1.

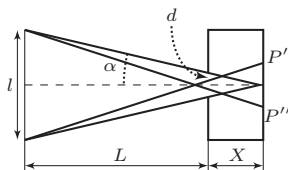
Sumujemy wartości dla wszystkich schodzących kart, otrzymując tzw. wartość bieżącą. Im jest ona większa, tym bardziej opłacalna dla nas staje się gra (w filmie „21” taka sytuacja była określana mianem *Hot deck*). Już przy wartości +2 gracz uzyskuje przewagę nad kasynem. Można to wytłumaczyć tym, że duża wartość bieżąca oznacza, iż w talii pozostało sporo dużych kart i zwiększa się prawdopodobieństwo, że krupier będzie miał furę, podczas gdy gracz, wiedząc o nadchodzących dużych kartach, będzie pasował nawet z marnym wynikiem. Czytelnik Wnikliwy może zauważyć, że średnio nasz licznik i tak wynosi 0. Jak zatem zapewnić sobie zyski z gier *Hot* talią? Pomysł polega na tym, że gdy licznik jest ujemny, gramy na małe stawki, a gdy zrobi się istotnie dodatni, podnosimy stawkę (tzn. gramy kolejne gry np. o 100 złotych zamiast o 1 złoty). Odpowiednio manewrując stawkami, możemy wreszcie osiągnąć upragnioną przewagę.

Nic prostszego, od jutra możemy zatem iść do kasyna i zacząć wygrywać miliony. Niestety, nie do końca. Aby nauczyć się sprawnego liczenia kart oraz zmieniających się strategii, potrzeba zdolności szybkiego liczenia oraz dużo pracy. Poza tym kasyna zaczęły się lekko bronić przed „liczącymi”, na przykład wprowadzając grę kilkoma taliami lub wprowadzając maszyny do tasowania po każdym rozdaniu. Lepiej zatem spróbować pewniejszego sposobu na wygranie fortuny, na przykład przez rozwiązanie jednego z problemów milenijnych...



### Rozwiązanie zadania F 950.

*Camera obscura* to nieprzezroczysta skrzynka z niewielkim otworkiem z przodu i matówką albo kliszą fotograficzną zamykającą ją od tyłu. Na kliszę, przez otworek działający jak obiektyw w aparacie fotograficznym, padają promienie pochodzące od poszczególnych punktów fotografowanego obiektu, tworząc jego pomniejszony obraz. Aby na fotografii było widać osobne tygrysie pręgi, obszary kliszy  $P'$  i  $P''$ , na które padają promienie pochodzące od najbliższych punktów sąsiednich pręg, nie mogą się przekrywać. Warunek ten będzie spełniony dla głębokości kamery  $X > d/2 \tan \alpha$ .



Ponieważ  $\tan \alpha = (l/2)/(L + X)$ , więc  $X > d(L + X)/L$ , skąd  $X > dL/(1 - d/l)$ . Korzystając z tego, że  $d/l \ll 1$ , otrzymujemy  $X > dL/l$ . Tak więc głębokość kamery powinna być większa niż 20 cm.