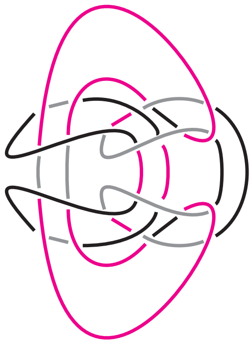


I to pozwala na wykazanie, że splot trzech okręgów wedle recepty Gardnera jest różny od oryginalnego splotu Boromeuszy – pierwszy z nich jest trójkolorowalny (jak widać na marginesie), a drugi nie, co wykażemy. Spróbujemy bowiem pokolorować go zgodnie z zasadami trójkolorowalności.

Zacznijmy od skrzyżowania 1, kolorując je trzema kolorami. Wówczas na skrzyżowaniu 2 powinniśmy użyć koloru czarnego, ponieważ spotykają się tam już pozostałe. Ten wybór implikowałby pokolorowanie ostatnich dwóch części

niepomalowanego okręgu również na czarno, bowiem na skrzyżowaniach 3 i 4 już dwie linie będą czarne (więc i trzecia taka być musi). Ale wtedy skrzyżowania numer 5 i 6 nie spełniałyby ustalonych reguł kolorowania.

Z kolei przyjęcie dla skrzyżowania 1 strategii kolorowania jednym kolorem prowadzi do wniosku, że na skrzyżowaniu 2 również powinniśmy użyć tego koloru. Ale wówczas dla pozostałych niepomalowanych części okręgu należałoby wybrać ten sam kolor, a przecież diagramy jednobarwne wykluczamy.

Stąd wniosek, że splot okręgów Boromeuszy nie jest trójkolorowalny. A zatem nie może być w skończonej liczbie ruchów podstawowych przekształcony na splot gardnerowski – *quod erat demonstrandum.*

Na sam koniec warto, być może, oddać się następującej refleksji. Na ile w zajmowaniu się matematyką istotna jest intuicja, a na ile formalizm? W przypadku rozwiązania omawianego problemu ważne było jedno i drugie. Tytułowych „supełków” nie dałoby się rozplątać bez wyrobienia w sobie przekonania na temat tego, czy omawiane sploty są równoważne czy też nie – pierwszym etapem znalezienia odpowiedzi była zatem czysta zabawa wyobraźnią. Gdyby na tym jednak poprzestać, całość prac okazałaby się jałowa – formalizm na pewnym etapie był konieczny, by doprowadzić rozumowanie do końca i dojść do rozwiązania.

Oczywiście formalizm, z którego tu korzystaliśmy, był minimalny. Łatwo się jednak domyślić, że w przypadku problemów o większym stopniu złożoności wykorzystuje się bardziej zaawansowany aparat teoretyczny. Parafrazując zatem powszechnie znaną frazę, można by rzec – wyobraźnia jest równie ważna jak wiedza.

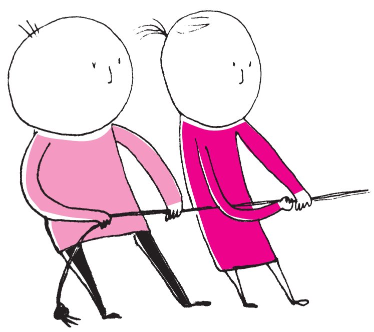
Gra w sumo

*Michał MIŚKIEWICZ**

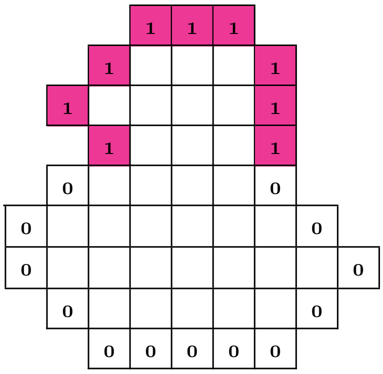
*doktorant, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Czy Czytelnik zna grę w przeciąganie liny? Dwie drużyny ciągną dwa końce liny w przeciwne strony, a wygrywa ta, której uda się przeciągnąć linę na swoją stronę. Ściślej, gra kończy się w momencie wyjścia środka liny (zazwyczaj oznaczonego wstążką) z umówionego pola gry. Matematycy przypisują tę samą nazwę podobnej grze rozgrywającej się w dwóch (i więcej) wymiarach, w której to środek liny może poruszać się w wielu kierunkach, a nie tylko lewo-prawo. Trudno sobie jednak takie przeciąganie wyobrazić, dlatego przyjąłem termin *gra w sumo.*

Plansza do gry w sumo (dalej oznaczana przez $\overline{\Omega}$) składa się z pewnej liczby pól na szachownicy. Każde pole szachownicy P ma czterech sąsiadów, oznaczanych tutaj P_1, P_2, P_3, P_4. Pole nazwiemy *wewnętrznym*, jeśli leży na planszy razem ze swoimi sąsiadami, w przeciwnym przypadku nazwiemy je *brzegowym.* Zbiór pól wewnętrznych oznaczymy przez Ω, a brzegowych przez $\partial\Omega$.



Dwoje zawodników, Jaś i Małgosia, zaczyna grę na pewnym polu P leżącym na planszy. Jeśli pole P jest brzegowe, gra się kończy. W przeciwnym przypadku rzut symetryczną monetą decyduje, który z zawodników uzyskuje w tej turze przewagę nad przeciwnikiem, dzięki czemu przepycha go na wybrane przez siebie sąsiednie pole (i z rozpędu sam też tam ląduje). Gra toczy się w turach do momentu, gdy gracze wylądują na polu brzegowym.



Rys. 1. Przykładowa plansza i funkcja rozstrzygnięcia. Jak widać, Małgosia postanowiła dać Jasiowi fory.

Kto wygrywa? Podobnie jak w grze w przeciąganie liny, musimy się na coś umówić. Dojście do pewnych pól brzegowych będzie oznaczać wygraną Jasia, a do innych – Małgosi. Przyjętą umowę możemy opisać za pomocą jednej funkcji $g\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$, określonej wzorem

$$g(P) := \begin{cases} 1 & \text{jeśli dojście do } P \text{ daje wygraną Małgosi,} \\ 0 & \text{jeśli Jasiowi.} \end{cases}$$

Przebieg gry jest więc zdeterminowany przez planszę $\overline{\Omega}$, funkcję rozstrzygnięcia g, decyzje zawodników, losowe wyniki rzutów monetą oraz wybór pola startowego.

W dalszej części artykułu przyjmiemy, że Jaś i Małgosia mają ustalone racjonalne strategie, czyli przy każdym przepchnięciu przeciwnika wybierają sąsiednie pole w taki sposób, by zmaksymalizować prawdopodobieństwo swojej wygranej. Jeśli dodatkowo ustalimy pole startowe P, to gra jest już czysto losowa i możemy określić warunkowe prawdopodobieństwo wygranej Małgosi:

$$h(P) := \mathbb{P}\left(\text{wygra Małgosia} \mid \text{gra startuje z } P\right).$$

W ten sposób otrzymaliśmy pewną funkcję $h\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$. Gdy P jest polem brzegowym, gra kończy się już na starcie, a jej rozstrzygnięcie jest opisane funkcją g, a zatem $h(P) = g(P)$. Rozgrywka robi się ciekawsza, jeśli P jest polem wewnętrznym. Z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ chwilową przewagę uzyska Małgosia i przepchnie Jasia na takie sąsiednie pole P_i (gdzie $i = 1,2,3,4$), dla którego prawdopodobieństwo przyszłej wygranej $h(P_i)$ jest możliwie największe. Jeśli z kolei los padnie na Jasia, wybierze on takiego sąsiada P_j, dla którego $h(P_j)$ jest najmniejsze. Ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite otrzymujemy więc

$$\begin{aligned} h(P) &= \mathbb{P}\left(\text{wygra M} \mid \text{start z } P\right) = \\ &= \mathbb{P}\left(\text{wygra M} \mid \text{start z } P_i\right)\mathbb{P}\left(\text{ruch M}\right) + \mathbb{P}\left(\text{wygra M} \mid \text{start z } P_j\right)\mathbb{P}\left(\text{ruch J}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\Big(\max_{i=1,2,3,4} h(P_i) + \min_{j=1,2,3,4} h(P_j)\Big). \end{aligned}$$

Dla dowolnej funkcji h różnicę obu stron powyższej równości oznaczymy przez

$$\Delta h(P) := \frac{1}{2}\Big(\max_{i=1,2,3,4} h(P_i) + \min_{j=1,2,3,4} h(P_j)\Big) - h(P).$$

Wyrażenie to jest nazywane dyskretnym operatorem ∞-Laplace'a (chociaż Pierre-Simon de Laplace (1749–1827) nigdy takiego nie rozważał). Dotychczasowe rozważania możemy podsumować następująco – funkcja $h\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem zagadnienia

$$(\star) \qquad \begin{cases} \Delta h(P) = 0 & \text{dla } P \in \Omega, \\ h(P) = g(P) & \text{dla } P \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Do znalezienia rozwiązania wykorzystamy metodę noszącą imię Oskara Perrona (1880–1975); noszącą bardzo słusznie, gdyż to jemu ją zawdzięczamy. Opiera się ona na własnościach funkcji v spełniających nierówność $\Delta v \geqslant 0$ zamiast równości. Są to tak zwane *podrozwiązania*, których rodzinę oznaczymy przez

$$V = \left\{v\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R} : \Delta v(P) \geqslant 0 \text{ dla } P \in \Omega,\ v(P) = g(P) \text{ dla } \partial\Omega\right\}.$$

Rodzina V jest niepusta – należy do niej, na przykład, funkcja v zerująca się na Ω i równa funkcji g na $\partial\Omega$. Ponadto wszystkie funkcje $v \in V$ są ograniczone z góry przez 1, co wynika z następującego faktu:

Zadanie 1 (zasada maksimum). Jeśli $\Delta v(P) \geqslant 0$ dla $P \in \Omega$ oraz $v(P) \leqslant M$ dla $P \in \partial\Omega$, to również $v(P) \leqslant M$ dla $P \in \Omega$.

Wskazówka. Jeśli $v(P)$ przyjmuje największą wartość dla pewnego pola $P \in \Omega$, to przyjmuje tę samą wartość również dla wszystkich pól sąsiednich.

Jesteśmy teraz gotowi zdefiniować rozwiązanie.

Twierdzenie (o istnieniu). Funkcja $h\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ określona wzorem

$$h(P) = \sup_{v \in V} v(P)$$

jest rozwiązaniem zagadnienia $(\star)$.

Na marginesie pozostawiam pytania, które Czytelnika mogą słusznie zaniepokoić: czy racjonalna strategia w ogóle istnieje? co zrobić, jeśli gra toczy się w nieskończoność bez rozstrzygnięcia? Odpowiedź na te i inne wątpliwości można znaleźć w skrypcie Julio Rossiego *Tug-of-war games. Games that PDE people like to play*, dostępnym na jego stronie.

Czytelnik może rozumieć $h(P)$ jako maksymalną wartość $v(P)$ dla wszystkich $v \in V$. Ze względów technicznych korzystamy tu z pojęcia supremum, bo maksimum mogłoby nie istnieć.

Rozwiązanie zadania F 943.
Jeśli przewodnik poddamy jednostajnemu przyspieszeniu a, to elektrony przewodnictwa (przyjmujemy, że wewnątrz metalu zachowują się jak cząstki swobodne) doznają względem sieci krystalicznej metalu przyspieszenia $-a$, co odpowiada ruchowi w polu elektrycznym E:

$$-ma = -eE.$$

Pole $E = am/e$ wywołuje przepływ prądu o gęstości $j = \sigma am/e$, gdzie σ oznacza przewodnictwo właściwe metalu. Wartość tego prądu można zmierzyć i (zmierzywszy również przyspieszenie i przewodnictwo właściwe) wyznaczyć żądany stosunek:

$$\frac{e}{m} = \frac{\sigma a}{j}.$$

Opis doświadczeń i wyników pomiarów można znaleźć w *Physical Review* 8, 97 (1916).

Rozwiązanie zadania M 1553.
Każdą podróż złożoną z co najmniej jednego kursu autobusem nazwiemy *trasą*; skoro żadna trasa nie odwiedza tego samego miasta więcej niż raz, to wszystkich tras jest skończenie wiele. Wobec tego możemy wybrać (co najmniej jedną) trasę t złożoną z maksymalnej możliwej liczby kursów.

Miasto na końcu trasy t ma tę własność, że nie kursuje zeń żaden autobus – w przeciwnym przypadku można by przedłużyć trasę o ten kurs, otrzymując albo trasę dłuższą (co przeczy wyborowi t), albo trasę odwiedzającą dwa razy to samo miasto (co przeczy założeniom zadania). Podobnie początek trasy t to miasto, do którego nie można dojechać autobusem.

Dotychczasowe uwagi na temat rodziny V pozwalają stwierdzić, że powyższy wzór jest poprawny, a ponadto $0 \leqslant h(P) \leqslant 1$ dla wszystkich $P \in \overline{\Omega}$. Narzuca się pytanie, czy znaleziona właśnie funkcja h pokrywa się z rozważaną wcześniej funkcją opisującą prawdopodobieństwo wygranej. Poniższe zadanie rozwiewa tę wątpliwość.

Zadanie 2 (jednoznaczność). Zagadnienie $(\star)$ ma tylko jedno rozwiązanie.

Wskazówka. Rozważyć dwa rozwiązania h_1, h_2 i powtórzyć rozumowanie z zadania 1 dla funkcji $h_1 - h_2$, starannie dobierając punkt o ekstremalnych własnościach.

Dowód twierdzenia opiera się na dwóch wyjątkowych własnościach rodziny V, których samodzielne sprawdzenie nie powinno sprawić Czytelnikowi problemu.

Zadanie 3. Jeśli funkcje $v_1, \ldots, v_k$ należą do V, to funkcja v określona jako ich maksimum

$$v(P) = \max\left(v_1(P), \ldots, v_k(P)\right) \quad \text{dla } P \in \overline{\Omega}$$

również należy do V.

Zadanie 4. Jeśli $v \in V$ oraz $P \in \Omega$, to funkcja $\overline{v}\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ określona przez

$$\overline{v}(P) = \frac{1}{2}\Big(\max_{i=1,2,3,4} v(P_i) + \min_{j=1,2,3,4} v(P_j)\Big),$$
$$\overline{v}(Q) = v(Q) \quad \text{dla } Q \neq P$$

również należy do rodziny V. Ponadto $\Delta\overline{v}(P) = 0$ oraz $v(Q) \leqslant \overline{v}(Q)$ dla $Q \in \overline{\Omega}$.

Dowód twierdzenia. Równość $h(P) = g(P)$ dla $P \in \partial\Omega$ wynika wprost z określenia V i h, pozostaje nam sprawdzić równość $\Delta h = 0$; ustalmy więc pole $P \in \Omega$. Z określenia h wynika, że dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja $v_0 \in V$ spełniająca $v_0(P) > h(P) - \varepsilon$. Podobnie dla każdego sąsiedniego pola P_i znajdziemy funkcję $v_i \in V$, dla której $v_i(P_i) > h(P_i) - \varepsilon$. Ich wspólne ograniczenie $v = \max(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4)$ należy do rodziny V na mocy zadania 3 oraz

$$v(Q) > h(Q) - \varepsilon \quad \text{dla } Q \in \{P, P_1, P_2, P_3, P_4\}.$$

Skonstruowana w zadaniu 4 funkcja $\overline{v}$ również spełnia te nierówności, a ponadto dzięki $\overline{v} \in V$ mamy $\overline{v}(Q) \leqslant h(Q)$ dla wszystkich $Q \in \overline{\Omega}$. W rezultacie

$$\Big|\max_{i=1,2,3,4} h(P_i) - \max_{i=1,2,3,4} \overline{v}(P_i)\Big|, \ \Big|\min_{j=1,2,3,4} h(P_j) - \min_{j=1,2,3,4} \overline{v}(P_j)\Big| < \varepsilon.$$

Porównanie liczb $\Delta h(P)$ i $\Delta\overline{v}(P)$ (ta druga jest zerem!) przy użyciu nierówności trójkąta daje

$$|\Delta h(P)| = |\Delta h(P) - \Delta\overline{v}(P)| < \tfrac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon) + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Powyższa nierówność jest prawdziwa dla dowolnie małej liczby $\varepsilon > 0$, a więc zachodzi żądana równość $\Delta h(P) = 0$. □

Zależnie od swojego filozoficznego usposobienia Czytelnik może być z tego dowodu zadowolony lub nie. *Wykazaliśmy istnienie* rozwiązania h, ale *nie wyznaczyliśmy* funkcji h jawnym wzorem. Tę wadę ma zresztą większość metod stosowanych obecnie w równaniach różniczkowych cząstkowych, do których zagadnienie $(\star)$ zalicza się jako dyskretny odpowiednik.

Problem ten można częściowo obejść. Funkcja h jest większa lub równa każdej funkcji $v \in V$, więc stosując na przemian konstrukcje z zadań 3 i 4, możemy znaleźć coraz lepsze przybliżenia z dołu. Gdybyśmy natomiast w definicji rodziny V zastosowali przeciwny znak nierówności (czyli $\Delta v \leqslant 0$), to funkcję h otrzymalibyśmy jako infimum tej rodziny, co pozwala znaleźć przybliżenia h również z góry. W ten sposób możemy znaleźć wartości h z dokładnością dwóch cyfr po przecinku dla planszy z rysunku 1. Warto zwrócić uwagę, że dopiero wtedy jesteśmy w stanie przeprowadzić symulacje naszej rozgrywki. O dziwo, w rzeczywistości zawodnicy sumo radzą sobie doskonale bez wykonywania takich obliczeń…

			1	1	1			
		1	0,92	0,88	0,91	1		
	1	0,92	0,85	0,77	0,83	1		
		1	0,83	0,66	0,66	1		
	0	0,50	0,66	0,49	0,33	0		
0	0,16	0,33	0,49	0,37	0,24	0,12	0	
0	0,11	0,22	0,33	0,24	0,16	0,11	0,05	0
	0	0,11	0,16	0,12	0,08	0,05	0	
		0	0	0	0	0		

Rys. 2. Przybliżone rozwiązanie dla planszy i funkcji rozstrzygnięcia z rysunku 1.