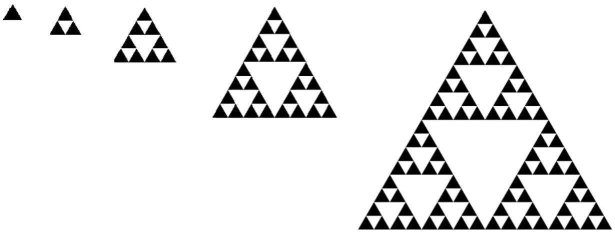
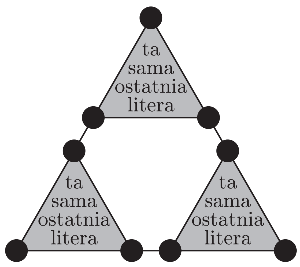
Rysunki 1–5 ilustrują grafy ruchów dla wież Hanoi kolejno dla $n = 1$ (jeden krążek, przestawiany pomiędzy słupkami a, b, c), dla $n = 2$ (obok każdego wierzchołka przedstawiono ustawienie, które mu odpowiada) oraz dla $n = 3$, 4 i 6.

A oto kolejne kroki w konstrukcji trójkąta Sierpińskiego:



Rys. 6

To zaskakujące podobieństwo oczywiście nie jest przypadkowe, ale jak je wyjaśnić? Zauważmy, że każdy z grafów na rysunkach 1–3 składa się z trzech części, odpowiadających ostatniej literze ciągu, czyli położeniu największego krążka (rys. 7). Każda z takich części to graf ruchów dla $n - 1$ pozostałych krążków, a trzy krawędzie pomiędzy tymi częściami odpowiadają przełożeniu największego krążka na inny słupek.



Rys. 7

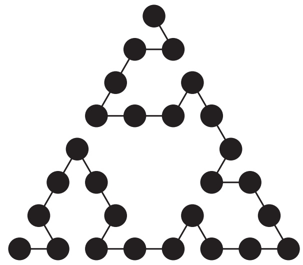
Rysunek 7 przedstawia więc metodę konstrukcji grafów dla kolejnych n. Ale to jest także metoda konstrukcji trójkąta Sierpińskiego z rysunku 6, co tłumaczy ich podobieństwo.

Analiza grafów ruchów dla wież Hanoi pozwala łatwo odpowiedzieć na pytania z początku artykułu. Pojedynczy ruch ilustrowany jest w grafie jako krawędź, więc ciąg ruchów to droga pomiędzy wierzchołkami. Stąd pytania o najmniejszą lub największą liczbę ruchów to pytania o najkrótszą lub najdłuższą drogę w grafie.

Rozwiązanie klasycznego problemu przestawienia wszystkich krążków z jednego słupka na drugi widać na grafie natychmiast: najkrótsza droga prowadzi wzdłuż odpowiedniego boku trójkąta. Ma ona długość $2^n - 1$, gdyż graf dla $n = 1$ ma bok o długości $2^1 - 1$ (rys. 1), a długość boku każdego kolejnego grafu to dwukrotność długości poprzedniego boku zwiększona o 1 (rys. 7).

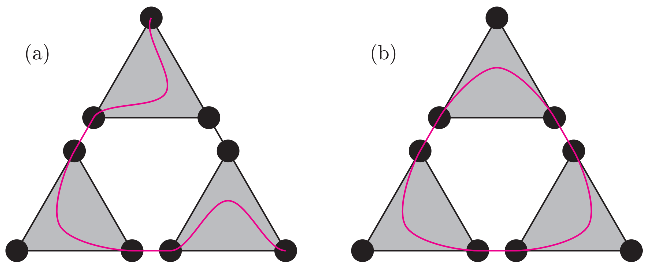
Z rysunku 7 (lub ze schematu z początku artykułu) wynika też natychmiast, że wierzchołków grafu (czyli dozwolonych ustawień krążków) jest 3^n. A ile jest wszystkich krawędzi grafu? To też można odczytać z rysunku 7.

Rysunek 8 ilustruje odpowiedź na pytanie o najdłuższą drogę dla $n = 3$,



Rys. 8

a na rysunku 9(a) widzimy, jak na tej podstawie wyznaczyć analogiczną drogę dla większego n. Można dostrzec, że jej długość to 2/3 liczby wszystkich krawędzi grafu i – zarazem – liczba wszystkich wierzchołków zmniejszona o 1 (co pozwala inaczej niż powyżej wyznaczyć liczbę krawędzi grafu). W podobny sposób (rys. 9(b)) uzyskujemy drogę zamkniętą, przechodzącą przez każdy wierzchołek grafu dokładnie raz (tzw. *cykl Hamiltona*).



Rys. 9. Kolorowe łuki symbolizują najdłuższe drogi wewnątrz danych trójkątów (jak na rys. 8).

Powróćmy do pytania o najkrótszą drogę, ale niekoniecznie pomiędzy dwoma ustawieniami wszystkich krążków na jednym słupku. Załóżmy, że wierzchołki początkowy i końcowy są w różnych trójkątach grafu z rysunku 7 (jeśli są w tym samym, możemy rozważać tylko ten trójkąt, czyli graf dla mniejszego n). Sprawa wydaje się prosta: wystarczy dojść od wierzchołka początkowego do krawędzi łączącej rozważane dwa trójkąty, przejść tą krawędzią do drugiego trójkąta i – już wewnątrz niego – dojść do wierzchołka końcowego.

Rozumowanie to jest proste i… niepoprawne. Zgodnie z nim droga pomiędzy wierzchołkami *aab* i *bba* na rysunku 3 prowadzi najpierw do wierzchołka *ccb* (3 ruchy), następnie krawędzią *ccb*—*cca* (1 ruch) i wreszcie do *bba* (kolejne 3 ruchy), ma więc długość 7. Tymczasem droga *aab*—*aac*—*cac*—*cbc*—*bbc*—*bba* jest krótsza, a największy krążek przenoszony jest na niej dwukrotnie!

Co więcej, czasem istnieją dwie różne najkrótsze drogi, na przykład od *cab* do *cba*. Pozostawiam Czytelnikom nietrudne już teraz poprawienie rozumowania oraz zachęcam do własnych badań nad wieżami Hanoi.

Wykorzystaliśmy tu skojarzenie z trójkątem Sierpińskiego do badania wież Hanoi, opisane m.in. przez Iana Stewarta w książce *Another Fine Math You've Got Me Into…* (New York: W.H. Freeman and Company, 1992). Korzyści płyną także w drugą stronę – badanie wież Hanoi pomogło wyznaczyć średnią odległość między punktami trójkąta Sierpińskiego (*The average distance on the Sierpiński gasket*, A.M. Hinz i A. Schief, *Probab. Th. Rel. Fields* 87 (1990), str. 129–138).