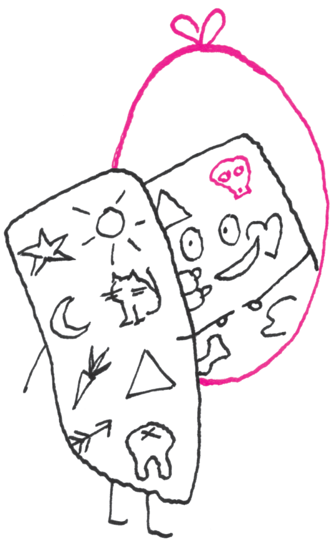
Naprawdę ciekawa gra

Mariusz SKAŁBA[*]

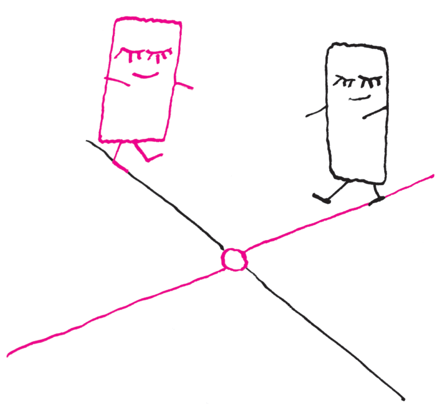
Jak to jest zrobione?



Mówi się, że gry (mniej lub bardziej) towarzyskie bywają interesujące i że wpływają pozytywnie na rozwój intelektualny gracza. To drugie jest całkowicie bezdyskusyjne i dodam optymistycznie, że rozwijać można się w każdym wieku. Moje duże wątpliwości budzi natomiast atrybut *interesujące*, który chyba zbyt pochopnie przypisuje się wielu grom. Osobiście nie potrafię zachwycić się przebiegiem rozgrywek nawet tak szacownych gier, jak szachy czy brydż, ale, jak wiadomo, o gustach się nie dyskutuje.

Cóż zatem ciekawego może być w grze towarzyskiej jako takiej? Według mnie wyłącznie matematyka, która kryje się za jej zasadami (a niekoniecznie za jej rozgrywką!). Oto dość świeży przykład takiej gry – żeby nie uprawiać kryptoreklamy, nazwijmy ją roboczo grą X. Talia składa się z 55 kart. Na każdej z nich jest 8 różnych obrazków typu: słoneczko, kot, marchewka itp. ... I teraz rzecz najważniejsza! Dowolne dwie karty mają dokładnie jeden obrazek wspólny. W instrukcji zaproponowano kilka prostych gier z użyciem takiej talii. Najprostsza polega na tym, że dwóch graczy, z których każdy otrzymał początkowo 27 kart, wykłada w każdym ruchu jedną kartę na stół (jedna karta nie bierze udziału w grze). Ten, który jako pierwszy spostrzeże i nazwie wspólny obrazek, wygrywa ruch i pozbywa się tej karty. Wygrywa ten, który wcześniej pozbędzie się wszystkich kart. W przypadku większej liczby graczy możliwe są dość oczywiste warianty, które czynią grę jeszcze ciekawszą (?).

Ale my nie chcemy tutaj zajmować się rozgrywką, lecz zadajemy pytanie podstawowe: jak zaprojektować karty, aby spełniony był warunek, że każde dwie mają dokładnie jeden wspólny obrazek? O tym traktuje ten artykuł. Uważny Czytelnik od razu zauważy, że na tak sformułowane pytanie odpowiedź jest trywialna: na każdej z 55 kart należy umieścić słoneczko, a pozostałe 7 miejsc obsadzić $55 \cdot 7 = 385$ różnymi przedmiotami! Jednak chodzi nam o coś więcej: pobieżna inspekcja talii kart przekonuje nas, że różnych obrazków jest około 50, a nie ponad 350! Po dłuższej grze zauważamy ponadto, że wspólne obrazki z całego katalogu obrazków pojawiają się mniej więcej równomiernie (np. słoneczko podobnie często jak marchewka!). To wszystko *rozgrywało* się na polu namiotowym w Polańczyku, nad pięknym Jeziorem Solińskim. Moich kompanów wypoczynku (wyłącznie niematematyków!) zachwyciło właśnie to: bezkompromisowe przestrzeganie reguły w nietrywialny sposób! Zapytali mnie wprost: **Jak to jest zrobione?** Poszli pływać na deskach, a ja znowu miałem pretekst, żeby zostać w bazie windsurfingowej Malibu.



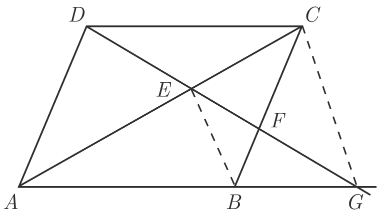
Szukałem podobnych sytuacji w różnych działach matematyki i dość szybko ustaliłem, że „dwie różne proste przecinają się **na ogół** w dokładnie jednym punkcie". U nas „proste" będą kartami, a „punkty" będą obrazkami. Odważnie brnąłem dalej, ufając klasykom, którzy w roli „punktów" widzieli nawet krzesła, byle spełniały aksjomaty! Póki co przeszkadzało mi bardzo wytłuszczone zastrzeżenie **na ogół**, które dopuszcza, że są na świecie proste równoległe. Ale my nie chcemy dopuszczać żadnych wyjątków! Każde dwie różne „proste" powinny przecinać się w dokładnie jednym „punkcie". Czy są takie dziwne geometrie? Są i to pod ręką!

Patrz np.: M. Donten-Bury, *Czy widział ktoś płaszczyznę rzutową?*, Delta 6/2011, M. Kordos, *Dziewięć twarzy płaszczyzny rzutowej*, Delta 5/2013.

Każdy Czytelnik *Delty* słyszał zapewne o płaszczyźnie rzutowej, ale dla porządku przypomnijmy jej konstrukcję. Niech $\mathbb{F}$ będzie dowolnym ciałem. Oznaczmy najpierw zbiór trójek elementów (x_1, x_2, x_3), gdzie $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{F}$ przez $\mathbb{F}^3$ i wprowadźmy w $\mathbb{F}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ następującą relację R. Piszemy $(x_1, x_2, x_3) R (y_1, y_2, y_3)$ wówczas, gdy istnieje $a \in \mathbb{F}$, $a \neq 0$, takie, że $(x_1, x_2, x_3) = a(y_1, y_2, y_3)$. Łatwo sprawdzić, że R jest relacją równoważności na

[*]Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Rozwiązanie zadania M 1417.



Skoro trójkąty BGF i CFE mają równe pola, to także trójkąty BGE i CBE mają równe pola, więc ich wysokości opuszczone na wspólną podstawę BE są równej długości, a stąd $BE \parallel CG$. Niech x oznacza szukany stosunek. Z twierdzenia Talesa dostajemy kolejno

$$x = \frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BG} = \frac{DC}{BG} = \frac{FC}{BF} = \frac{CG}{BE} = \frac{AC}{AE} = 1 + \frac{1}{x}.$$

Zatem $x^2 = x + 1$, skąd $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

zbiorze $\mathbb{F}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$. Określamy teraz płaszczyznę rzutową nad ciałem $\mathbb{F}$ jako zbiór $(\mathbb{F}^3 \backslash \{(0,0,0)\})/R$ klas abstrakcji relacji R i oznaczamy go tradycyjnie symbolem $\mathbb{P}^2(\mathbb{F})$.

Jeśli, na przykład, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, to możemy rozpatrywać punkt $P = [(1,2,3)]$. Biorąc $a = 5$, możemy ten sam punkt P zapisać inaczej: $P = [(5,10,15)]$. Określmy jeszcze proste w naszej geometrii. Jeśli $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, to określamy prostą $\mathcal{L}_{a,b,c}$ jako zbiór punktów $P = [(x,y,z)]$ spełniających równanie

$$ax + by + cz = 0.$$

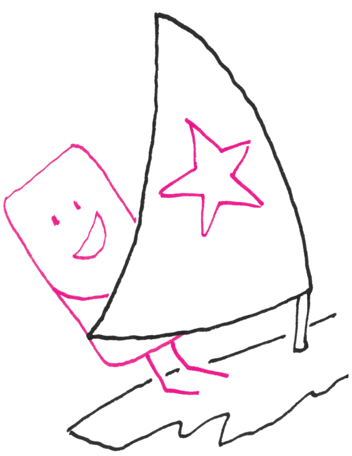
Proszę zauważyć, że tak określona przynależność punktu P do prostej nie zależy od wyboru przedstawiciela (x,y,z) z klasy abstrakcji. Jeśli rozpatrzymy teraz dwie różne proste $\mathcal{L}_{a_1,b_1,c_1}$ oraz $\mathcal{L}_{a_2,b_2,c_2}$, co oznacza, że nie istnieje $a \in \mathbb{F}$ takie, iż $(a_1,b_1,c_1) = a(a_2,b_2,c_2)$, to wówczas będzie

$$(b_1c_2 - b_2c_1, a_2c_1 - a_1c_2, a_1b_2 - a_2b_1) \neq (0,0,0).$$

Natychmiast sprawdzamy bezpośrednim rachunkiem, że

$$P = [(b_1c_2 - b_2c_1, a_2c_1 - a_1c_2, a_1b_2 - a_2b_1)] \in \mathcal{L}_{a_1,b_1,c_1} \cap \mathcal{L}_{a_2,b_2,c_2}.$$

Mamy więc to, czego chcieliśmy: każde dwie różne proste przecinają się w jednym punkcie (i tylko w jednym, co łatwo sprawdzić)! Do rozwiązania pozostał jeszcze jeden problem: na prostej w $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ jest nieskończenie wiele punktów, a na karcie gry X ma być zaledwie 8 obrazków. Ale dla matematyka to żaden problem: ciało $\mathbb{R}$ jest po prostu zbyt duże, zamiast $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ należy użyć ciała skończonego $\mathbb{F}_7$. Składa się ono z wszystkich reszt modulo 7, a zatem $\mathbb{F}_7 = \{0,1,2,3,4,5,6\}$. Działania też są określone modulo 7, np.: $3+6=2$; $3 \cdot 4 = 5$; $-1 = 6$; $1/4 = 2$ itp. Przekonajmy się, że na każdej prostej $\mathcal{L}_{a,b,c}$ leży dokładnie 8 punktów. Załóżmy, że np. $c \neq 0$. Z równania prostej obliczamy $z = \left(\frac{-a}{c}\right)x + \left(\frac{-b}{c}\right)y$. Mamy teraz ogromną swobodę. Za x i y możemy podstawiać niezależnie wszystkie elementy ciała $\mathbb{F}_7$, omijając tylko parę $(x,y) = (0,0)$ (dlaczego?). Razem z wynikowym z, obliczonym z powyższego wzoru, otrzymamy wówczas $7^2 - 1 = 48$ trójek, których klasy abstrakcji wyczerpują całą prostą – każdy punkt na prostej otrzymamy jednak sześciokrotnie, a zatem $|\mathcal{L}_{a,b,c}| = 48/6 = 8$. Podobnie obliczamy, że $|\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_7)| = \frac{7^3-1}{7-1} = 49 + 7 + 1 = 57$. A ile jest prostych w naszej geometrii? Z powyższego opisu wynika, że również 57. Każdy bowiem punkt $[(a,b,c)]$ wyznacza prostą $ax + by + cz = 0$ i odwrotnie – zjawisko to nazywamy dualnością i odgrywa ono ważną rolę w geometrii rzutowej. Coś tu się jednak nie zgadza, gdyż talia składa się z 55 kart – no dobrze, nie użyto po prostu pewnych dwóch prostych – zapewne z powodów eko-logicznych. Może przynajmniej zgadza się liczba różnych obrazków (czyli punktów) użytych przez projektanta gry X?

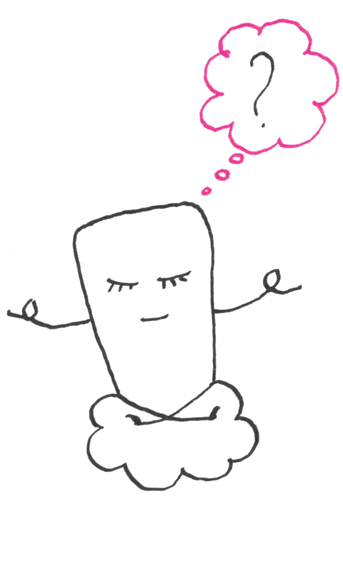


Zniknęli za horyzontem i szybko nie wrócą . . . , a więc do roboty: „kotek, marchewka, słoneczko . . . znowu słoneczko – już było, więc nie liczymy powtórnie . . . diabełek.” „Jeden, dwa, trzy, . . . , pięćdziesiąt siedem.”– dzięki Ci Boże za te piękne wzgórza, jezioro i płaszczyznę rzutową $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_7)$!

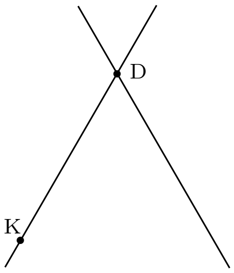
Więcej o zastosowaniu geometrii skończonych w projektowaniu konfiguracji kombinatorycznych (i nie tylko!) znajdzie Czytelnik w pięknej książce: W. Lipski, W. Marek, *Analiza kombinatoryczna*, PWN, Warszawa 1986.

Brakujące karty

Jeśli gra X jest rozrywkowym wcieleniem absolutu $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_7)$, to medytacjom z użyciem talii kart przeszkadza niewątpliwie jej niezupełność – brak dwóch kart. Matematyk nie może przejść nad tym do porządku dziennego – już woli nawet nie grać, niż przestać myśleć o dwóch brakujących kartach. Już słyszę te złośliwości pod naszym adresem: „Lubujecie się w rozmyślaniach nad tym, czego nie ma”. Na szczęście pogłębiona opinia o działalności matematyków zawiera stwierdzenie: „Oni rachują”. A więc do roboty!

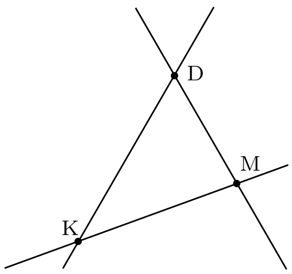


Policzę najpierw, na ilu kartach występuje słoneczko: wyszło, że na 8. Tak więc cały pęk prostych przechodzących przez słoneczko jest nienaruszony. Podobnie piesek występuje na 8 kartach, ale gorszy los spotkał kotka K – podobnie jak 13 innych przedmiotów występuje na 7 kartach. Diabełek D jest niepocieszony, chociaż wyróżniony: tylko on występuje na 6 kartach. Rysunek 1 ilustruje powyższy opis werbalny. „Prosta” DK (przechodząca przez diabełka i kotka) jest, oczywiście, jedną z brakujących prostych. Rozważmy teraz jeden z 13 pozostałych przedmiotów, oprócz K, leżących na 7 prostych – niech to będzie marchewka M. Mamy rozstrzygnąć problem: czy M leży na prostej DK, czy też na drugiej brakującej?



Rys. 1. Brakujące proste.

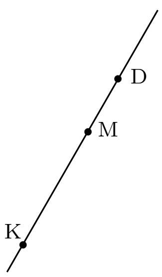
W tym celu należy wyjąć z tali wszystkie 7 kart „przechodzących” przez kotka K. Jeśli jest wśród nich karta zawierająca marchewkę M, to M leży na drugiej brakującej prostej. Jeśli natomiast żadna z tych kart nie przechodzi przez M, to M leży na prostej DK; inaczej mówiąc, diabełek, kotek i marchewka są współliniowe! Obie te sytuacje przedstawiono odpowiednio na rysunkach 2 i 3. Tak samo sadowimy pozostałe przedmioty leżące na 7 prostych.



Rys. 2. Prosta KM jest w talii.

Proszę zauważyć, że rozwiązanie problemu brakujących prostych nie wymagało użycia współrzędnych, tzn. nie pracowaliśmy z równaniami w $\mathbb{F}_7$ jak w poprzedniej części artykułu. Korzystaliśmy wyłącznie z własności „geometrycznych” typu: każda prosta zawiera 8 punktów, każdy punkt leży na 8 prostych itp. Te własności i wiele innych można wywieść z następujących aksjomatów abstrakcyjnej planimetrii rzutowej:

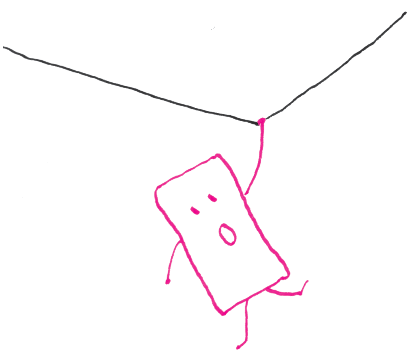
A1. *Przez każde dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta.*
A2. *Każde dwie różne proste przechodzą przez dokładnie jeden wspólny punkt.*
A3. *Istnieją cztery różne punkty, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej.*



Rys. 3. M leży na prostej DK.

Wychodząc z tych aksjomatów, można, na przykład, wykazać, że jeśli cała płaszczyzna składa się ze skończonej liczby punktów, to ta skończona liczba musi być postaci $m^2 + m + 1$ oraz
- na każdej prostej leży $m + 1$ punktów,
- przez każdy punkt przechodzi $m + 1$ prostych,
- wszystkich prostych jest też $m^2 + m + 1$.

Liczbę m nazywamy *rzędem* skończonej płaszczyzny rzutowej. Płaszczyzna $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_7)$ ma rząd $m = 7$. Jakie liczby naturalne m są rzędami skończonych płaszczyzn rzutowych? Jeżeli $m = p$ jest liczbą pierwszą, to uogólniając przedstawioną wyżej konstrukcję (używając ciała reszt $\mathbb{F}_p$ zamiast szczególnego ciała reszt $\mathbb{F}_7$), otrzymujemy płaszczyznę rzutową rzędu p. Tego typu konstrukcja wychodzi z ciała $\mathbb{F}$ i produkuje płaszczyznę $\mathbb{P}^2(\mathbb{F})$. Okazuje się, że $\mathbb{F}_p$ nie są jedynymi ciałami skończonymi. Pełny opis sytuacji zawiera się w klasycznym twierdzeniu, że dla każdej liczby pierwszej p i każdej liczby naturalnej k istnieje dokładnie jedno ciało o liczbie elementów p^k; oznaczamy je przez $\mathbb{F}_{p^k}$. Zobaczmy dla przykładu, jak powstaje ciało $\mathbb{F}_9$. Niech $\mathbb{F}_9$ jako zbiór składa się z napisów postaci $a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{F}_3$, natomiast i jest osobnym przedmiotem. Określmy działania w $\mathbb{F}_9$. Dodawanie i odejmowanie wykonujemy „po współrzędnych”:



$$(a + bi) \oplus (c + di) = (a + c) + (b + d)i, \quad (a + bi) \ominus (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

I tak, na przykład,

$$(1 + 2i) \oplus (1 + 1i) = 2 + 0i, \quad (1 + 2i) \ominus (1 + 1i) = 0 + 1i, \quad \ominus(1 + 2i) = 2 + 1i$$

i tak dalej.

Mnożenie $\odot$ jest ciekawsze (chociaż nie dla Czytelnika, który zna liczby zespolone):

$$(a + bi) \odot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Można sprawdzić, że otrzymujemy w ten sposób ciało, tzn. spełnione są wszystkie naturalne własności dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia znane z arytmetyki liczb rzeczywistych. Czytelnik może się zastanowić, jak znajdować elementy odwrotne do elementów różnych od $0 + 0i$. My zadowolimy się przykładem dzielenia:

$$(2 + 1i) \oslash (1 + 1i) = 0 + 1i, \text{ bo } (0 + 1i) \odot (1 + 1i) = 2 + 1i.$$

Rozwiązanie zadania F 854.
Średnia masa molowa powietrza to $0{,}21 \cdot 32\,\mathrm{g} + 0{,}79 \cdot 28\,\mathrm{g} \approx 28{,}8\,\mathrm{g}$. Różnica mas molowych tlenu i azotu wynosi $32\,\mathrm{g} - 28\,\mathrm{g} = 4\,\mathrm{g}$. Molowa gęstość gazu o masie molowej μ maleje z wysokością H jak $e^{-\frac{\mu g H}{RT}}$, gdzie $R = 8{,}314\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\cdot K}}$ jest stałą gazową, g przyspieszeniem ziemskim, a T temperaturą bezwzględną. Stosunek gęstości tlenu i azotu maleje na wysokości 830 m od $21/79 = 0{,}26OD58$ do

$$\frac{21}{79} \cdot 0{,}91^{4/28{,}8} \approx 0{,}2624,$$

a więc zawartość tlenu maleje z 21% do 20,78%.

Rozwiązanie zadania M 1418.
Na początku zauważmy, że dla nieparzystej liczby x zachodzi $x^4 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 16)$, ponieważ $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$ oraz $x-1$ lub $x+1$ jest podzielne przez 4, a pozostałe czynniki są parzyste. Ponadto na mocy małego twierdzenia Fermata $x^{16} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 17)$ dla x niepodzielnych przez 17. Zauważmy jeszcze, że

$$n^{n^{n^{n}}} - n^{n^{n}} = n^{n^{n}}\left(n^{\left(n^{n^{n}} - n^{n}\right)} - 1\right) = n^{n^{n}}\left(n^{n^{n}\left(n^{n^{n}-n} - 1\right)} - 1\right) = n^{n^{n}}\left(n^{ab} - 1\right),$$

gdzie $a = n^n$ i $b = n^{n^n - n} - 1$.
Jeśli $17|n$, to teza jest oczywista. Niech więc $17 \nmid n$. Jeśli n jest parzyste, to $n \geqslant 4$ i mamy $16|n^n = a$, więc $n^{ab} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 17)$. Jeśli n jest nieparzyste, to $n^n \equiv n (\mathrm{mod}\ 4)$, więc możemy zapisać $n^n - n = 4r$ i wówczas

$$b = n^{n^n - n} - 1 \equiv n^{4r} - 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 16),$$

skąd, jak poprzednio, $n^{ab} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 17)$, co daje tezę.

Tak więc $\mathbb{F}_9$ składa się z $3 \cdot 3 = 9$ elementów i jest ciałem – mamy więc płaszczyznę rzutową rzędu 9 i możemy zaprojektować odpowiednią grę z 10 obrazkami na każdej z (nawet) $9^2 + 9 + 1 = 91$ kart. Grę „minimalną” otrzymamy, wychodząc z płaszczyzny rzutowej $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ – karty są trzyobrazkowe i jest ich 7. Słynna hipoteza mówi, że jedynie potęgi liczb pierwszych p^k są rzędami skończonych płaszczyzn rzutowych.

Póki co najogólniejsze twierdzenie w tym kierunku udowodnili Bruck i Ryser (1949):

Jeśli istnieje płaszczyzna rzutowa rzędu m oraz m daje resztę 1 lub 2 w dzieleniu przez 4, to m jest sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych.

Wynika z tego natychmiast, że 6 nie jest rzędem płaszczyzny rzutowej – gry 7-obrazkowej nie da się skonstruować. Pierwsza liczba m, która nie podpada pod powyższe twierdzenie, to $m = 10$ – używając dobrych pomysłów i bardzo mocnych komputerów (Lam, Thiel, Swiercz, 1989), wykazano, że nie ma płaszczyzny rzutowej rzędu 10. Nie wiadomo, czy istnieje płaszczyzna rzutowa rzędu 12.

Wróćmy wreszcie do oryginalnej gry X. Zauważmy przede wszystkim, że jej projektanci nie musieli *a priori* korzystać z całej tej algebraicznej konstrukcji, która wychodzi od ciała $\mathbb{F}_7$. Może zrobili to „na piechotę” i mieli bardzo dużo szczęścia? To oczywiście możliwe, bo, jak wiadomo, szczęścia nigdy za dużo, ale można udowodnić, że płaszczyzny rzutowe rzędów $m \leqslant 8$ muszą pochodzić od ciał skończonych – tak więc nawet jeśli twórcy gry nie korzystali ze współrzędnych w ciele $\mathbb{F}_7$, to faktycznie te współrzędne daje się wprowadzić i może być np. tak, że $D = [(1,1,0)]$. Natomiast oprócz dość dokładnie opisanej powyżej płaszczyzny $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_9)$ istnieją jeszcze trzy inne płaszczyzny rzutowe rzędu 9, w których nie da się wprowadzić współrzędnych z ciała $\mathbb{F}_9$, a nawet więcej: nie zachodzi w nich twierdzenie Desarguesa, ale to już historia na inną opowieść.

Na zakończenie przepis na zrobienie sobie talii kart opartej na $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$

	Arbuz (1,1,2)	Beczka (1,1,1)	Cytryna (1,2,0)	Diabeł (1,1,0)	Foczka (1,2,2)	Gruszka (1,0,1)	Jabłko (1,0,0)	Kotek (0,0,1)	Lisek (1,2,1)	Marchew (0,1,2)	Piesek (0,1,1)	Słońce (0,1,0)	Trójkąt (1,0,2)
$x+y+2z=0$	•		•			•					•		
$x+y+z=0$		•	•							•			•
$x+2y=0$	•	•		•				•					
$x+y=0$			•		•			•	•				
$x+2y+2z=0$				•	•	•				•			
$x+z=0$	•				•							•	•
$x=0$								•		•	•	•	
$z=0$			•	•			•					•	
$x+2y+z=0$				•					•		•		•
$y+2z=0$		•			•		•				•		
$y+z=0$	•						•		•	•			
$y=0$						•	•	•					•
$x+2z=0$		•				•			•			•	

Talia pomniejszona, ale kompletna: Arbuz ma współrzędne jednorodne (1, 1, 2) oraz leży na prostych pierwszej, trzeciej, szóstej i jedenastej, gdyż liczby $1+1+2\cdot 2,\ 1+2\cdot 1,\ 1+2$ dzielą się przez 3. Zarówno prostych, jak i punktów jest $13 = 9+3+1$. Na każdej prostej leżą $4 = 3+1$ punkty, przez każdy z 13 punktów przechodzą 4 proste i wreszcie każde dwie różne proste mają dokładnie jeden punkt wspólny – proszę sprawdzić! Oczywiście, możliwych czwórek obrazków jest dużo więcej (55 razy, ale to „inne” 55) niż tych, które będą na jednej karcie-prostej: już Arbuz, Beczka i Cytryna nie znajdują się równocześnie na żadnej karcie.