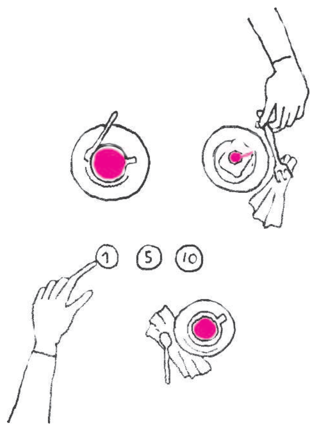
mała delta

Numizmatyka dla zachłannych

Wyobraźmy sobie następującą grę. Na stole w jednym rzędzie leży n monet o różnych nominałach. Dwoje graczy – Ania i Bartek – wykonuje na przemian ruchy, zaczyna Ania. Ruch polega na zabraniu jednej monety z lewego lub prawego końca rzędu. Wynikiem gry jest, oczywiście, suma nominałów monet zgromadzonych przez każdego z graczy. Jak powinna grać Ania, by uzyskać jak największą sumę, jeśli wie ona, że Bartek będzie grał optymalnie (tzn. będzie starał się zmaksymalizować swoją sumę)?



Na rozgrzewkę rozważmy prosty przykład dla $n = 4$:

1 5 10 2

Spróbujmy zastosować strategię zachłanną, polegającą na tym, że w każdym ruchu wybieramy ten kraniec, na którym znajduje się moneta o większym nominale. Zatem w pierwszym ruchu Ania weźmie 2:

1 5 10

Optymalnym ruchem Bartka w takiej sytuacji jest wzięcie 10. Po czym Ania weźmie 5, a Bartek 1. W takiej sytuacji *przewaga* Ani nad Bartkiem wyniosła $2 - 10 + 5 - 1 = -4$ (przez przewagę rozumiemy tu sumę nominałów zgromadzonych przez jednego z graczy pomniejszoną o sumę nominałów przeciwnika – nie przeszkadza nam to, że czasem ta przewaga będzie ujemna).

Okazuje się jednak, że w powyższym przykładzie Ania mogła zagrać lepiej. Wzięcie 1 w pierwszym ruchu powoduje, że Bartek bierze 5, z kolei Ania bierze 10, a Bartek 2. W takiej sytuacji przewaga Ani wynosi $1 - 5 + 10 - 2 = 4$.

Naiwna strategia zachłanna nie zawsze się opłaca, potrzebujemy zatem czegoś lepszego. Okazuje się, że jeśli liczba monet n jest parzysta, to Ania ma bardzo prostą strategię, dzięki której może zawsze uzyskać nieujemną przewagę, niezależnie od nominałów monet. Wyróżnijmy co drugą monetę w rzędzie:

1 5 10 2

Zauważmy, że istnieje strategia, w której Ania zabierze wszystkie wyróżnione monety. Istotnie, przed każdym ruchem Ani dokładnie na jednym krańcu będzie wyróżniona moneta (i tę monetę zabierze Ania), zaś przed każdym ruchem Bartka żadna z monet na krańcach nie będzie wyróżniona (więc Bartek nie będzie miał szans zabrać żadnej wyróżnionej monety).

Ania ma jednak wybór: może wyróżnić albo monety na pozycjach nieparzystych, albo monety na pozycjach parzystych. Oczywiście, wybierze ona ten wariant, który da jej większą sumę nominałów.

Jasne jest, że suma ta będzie równa co najmniej połowie całkowitej sumy nominałów.

Czytelnicy zechcą sprawdzić, że dla poniższego przykładu z bardziej „egzotycznymi” nominałami

(∗) 8 11 6 1 2 5

Ania może uzyskać przewagę równą $17 - 16 = 1$, zabierając monety z pozycji parzystych. Pytanie brzmi, czy ta strategia jest optymalna, tzn. czy gwarantuje Ani najlepszy możliwy wynik? Spróbujmy podejść do sprawy metodycznie. Oznaczmy wartości kolejnych nominałów w rzędzie przez $a[1], a[2], \ldots, a[n]$. Zauważmy, że w dowolnym momencie gry na stole znajduje się spójny podciąg monet. Dla ustalenia uwagi niech będą to monety na pozycjach o numerach $i, i+1, \ldots, j$ (dla $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$). Oznaczmy przez $d[i,j]$ maksymalną możliwą do uzyskania przewagę dla gracza, który w tej sytuacji wykonuje ruch – powiedzmy, że będzie to Ania. Ma ona do wyboru dwie możliwości. Wzięcie monety z lewego krańca (o numerze i) spowoduje przejście do sytuacji, w której na stole znajdują się monety o numerach $i+1, i+2, \ldots, j$. W tej sytuacji przewaga przeciwnika (Bartka) wyniesie $d[i+1,j]$, zatem przewaga Ani będzie równa $-d[i+1,j]$. Dodając zysk $a[i]$ z i-tej monety, widzimy, że po tym ruchu przewaga Ani wyniesie $a[i] - d[i+1,j]$. Rozumując analogicznie, otrzymujemy, że wzięcie monety z prawego krańca (o numerze j) daje jej przewagę $a[j] - d[i,j-1]$. Zatem wartości tablicy d można wyznaczyć za pomocą następującej rekurencji:

$$d[i,j] = \begin{cases} a[i] & \text{dla } i = j, \\ \max(a[i] - d[i+1,j], a[j] - d[i,j-1]) & \text{dla } i < j. \end{cases}$$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	8	3	3	2	2	**3**
2		11	5	6	6	9
3			6	5	5	2
4				1	1	4
5					2	3
6						5

Na marginesie znajduje się tablica dla naszego ciągu (∗). Przykładowo, aby wyznaczyć wyróżniony element tablicy, obliczamy

$$d[1,6] = \max(a[1] - d[2,6], a[6] - d[1,5]) = \max(8 - 9, 5 - 2) = 3.$$

Tak więc przewaga Ani w naszym przykładzie wynosi 3. Można ją uzyskać, biorąc w pierwszym ruchu monetę o nominale 5, a dalej grając zachłannie.

Powyższa tabelka koduje optymalną strategię dla całej gry. Problematyczne jest jednak to, że do jej wyznaczenia potrzebujemy wykonać $n(n-1)/2$ obliczeń, nawet jeśli chcemy wyznaczyć tylko pierwszy ruch Ani lub jej przewagę w grze. Podamy teraz prostszy sposób na wyznaczanie tych rzeczy.

Znajdźmy w ciągu trzy monety na kolejnych pozycjach $i, i+1, i+2$, których nominały spełniają nierówności $a[i] \leqslant a[i+1] \geqslant a[i+2]$, i zastąpmy je jedną monetą o nominale $a[i] - a[i+1] + a[i+2]$. Jeśli istnieje więcej takich trójek, to wybieramy dowolną z nich. Okazuje się (choć nie jest to ani oczywiste, ani łatwe do uzasadnienia), że taka operacja nie zmienia przewagi Ani. Stosując ją w naszym przykładzie (∗), dostajemy:

$$\underbrace{8 \quad 11 \quad 6}_{8-11+6=3} \quad 1 \quad 2 \quad 5$$

$$\downarrow$$

$$3 \quad 1 \quad 2 \quad 5$$

Ciąg bitoniczny to również taki, który do pewnego momentu rośnie, a potem maleje, ale tu takimi nie będziemy się zajmowali.

Jeśli ciąg nominałów jest bitoniczny (tzn. do pewnego momentu malejący, a dalej rosnący – czyli nie uda się znaleźć trzech monet spełniających powyższy warunek), to w takim przypadku działa już strategia zachłanna. Jest tak dlatego, że niezależnie od kolejnych ruchów największa moneta będzie zawsze znajdowała się na jednym z krańców ciągu. Zatem przewagę Ani w przypadku ciągu bitonicznego bardzo łatwo obliczyć – wystarczy zsumować liczby w porządku nierosnącym, biorąc co drugą liczbę ze znakiem minus. W naszym przypadku będzie to $5-3+2-1=3$.

Czytelnicy zechcą sprawdzić, że w przykładzie

$(**)$ 6 8 7 10 10 2 5 9 8

po zastosowaniu trzech operacji uzyskujemy bitoniczny ciąg

5 2 4

zatem i tym razem przewaga wynosi $5-4+2=3$.

A co z wyznaczeniem optymalnego ruchu? Otóż, jeśli w bitonicznym ciągu, powstałym po serii operacji, lewy nominał wynosi co najmniej tyle ile prawy (a zatem wzięcie monety z lewego krańca jest optymalnym ruchem), to również w pierwotnym ciągu wzięcie monety z lewego krańca jest optymalnym ruchem. Analogicznie w przypadku prawego krańca. Zatem w ciągu $(**)$ wzięcie 6 z lewego krańca jest optymalne, gdyż w ciągu bitonicznym nominał na lewym krańcu jest większy niż ten na prawym $(5>4)$.

Ostatecznie otrzymujemy przepis, który pozwala nam wyznaczyć optymalny ruch i wymaga jedynie liczby obliczeń rzędu n.

Małą Deltę przygotował Tomasz IDZIASZEK

Kącik przestrzenny (14): Inwersja w przestrzeni i rzut stereograficzny

Kiedy na płaszczyźnie mamy do czynienia z okręgami, to bardzo często posługujemy się rachunkiem na kątach, ponieważ znamy wiele przydatnych twierdzeń i faktów z tego zakresu. Niestety, trudno o analogiczne narzędzia w przestrzeni. Stanowi to wielki kłopot, gdy zmagamy się z zadaniami o sferach. Istnieje jednak kilka innych technik, skutecznych w zadaniach o okręgach, które działają również w przestrzeni. Są to: potęga punktu, jednokładność oraz inwersja. O tej ostatniej metodzie opowiemy w tym kąciku.

Przypomnijmy najpierw definicję i proste własności. Inwersją względem sfery S o środku O i promieniu R (mówi się o nich często: środek inwersji i promień inwersji) nazywamy przekształcenie, które przypisuje punktowi $A\neq O$ taki punkt A^*, leżący na półprostej $OA^{\rightarrow}$, że $OA^*\cdot OA=R^2$. Widać podobieństwo do definicji inwersji względem okręgu: ona wnętrze okręgu rozciąga na całe zewnętrze, a zewnętrze wpycha do wewnątrz – inwersja względem sfery podobnie zamienia jej wnętrze z zewnętrzem.

Inwersja względem sfery ma wiele przydatnych własności – oto niektóre z nich:

- inwersja jest przekształceniem odwrotnym do siebie,
- płaszczyzny i sfery przechodzą na płaszczyzny lub sfery,
- proste i okręgi przechodzą na proste lub okręgi,
- płaszczyzny i proste przechodzące przez środek inwersji przechodzą na siebie,
- płaszczyzny i proste nieprzechodzące przez środek inwersji przechodzą odpowiednio na sfery i okręgi przechodzące przez środek inwersji,
- sfery i okręgi nieprzechodzące przez środek inwersji przechodzą odpowiednio na sfery i okręgi nieprzechodzące przez środek inwersji,
- inwersja zachowuje kąty między krzywymi – kąt między krzywymi to kąt między prostymi stycznymi do tych krzywych w ich punkcie przecięcia.

Czytelnik dostrzeże, iż – niestety – nie można mówić o zachowaniu kąta między powierzchniami, gdyż pojęcie kąta między powierzchniami sensu nie ma: płaszczyzny styczne do dwóch powierzchni w różnych ich punktach wspólnych mogą tworzyć różne kąty dwuścienne.

Wygodnie jest jednak mówić o kątach między płaszczyznami, czy między sferami, czy też między płaszczyznami i sferami, bo w tych przypadkach rozwartość powstałych kątów dwuściennych nie zależy od tego, który punkt wspólny rozpatrujemy. Takie kąty są również przez inwersję zachowywane. Wykorzystamy to w następującym zadaniu, którego płaski odpowiednik jest banalnym rachunkiem na kątach.