Wierzchołki, krawędzie, ściany i dalej...

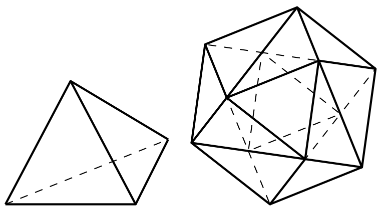
*Kamil RYCHLEWICZ**

* Doktorant, Institute of Science and Technology Austria

Zajmijmy się następującym prostym problemem. Niech P będzie wielościanem wypukłym o trójkątnych ścianach. Oznaczmy przez V, E, F odpowiednio liczbę jego wierzchołków, krawędzi i ścian. Jakie trójki (V, E, F) liczb naturalnych możemy w ten sposób uzyskać? Bez trudu możemy wypisać dwie równości:

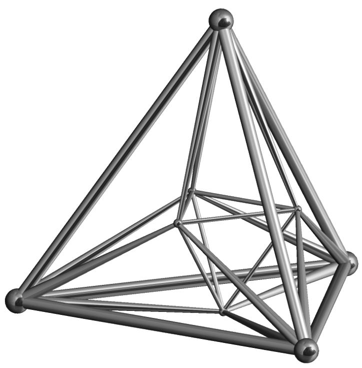
$$V - E + F = 2, \qquad 3F = 2E.$$

Pierwsza z nich to słynny wzór Eulera, druga zaś bierze się z wyliczenia na dwa sposoby liczby par (Krawędź, Ściana), gdzie Krawędź należy do Ściany. Stąd szybko dostajemy, że $(V, E, F) = (V, 3V - 6, 2V - 4)$. Ponadto $V \geqslant 4$ (w przeciwnym razie „wielościan" byłby figurą płaską). Okazuje się, że te dwa ograniczenia są już wystarczające, aby wektor (V, E, F) pochodził od pewnego wielościanu z trójkątnymi ścianami. Wnikliwego Czytelnika zachęcamy do skonstruowania odpowiednich przykładów.



Czworościan foremny i dwudziestościan foremny to przykłady wielościanów symplicjalnych

To oczywiście nie koniec zabawy. Załóżmy, że zamiast wielościanu rozpatrujemy jego wyżej wymiarowy odpowiednik (wielotop) P, którego ściany są sympleksami (czyli wyżej wymiarowymi odpowiednikami trójkątów, takimi jak trójwymiarowy czworościan) – innymi słowy, wielotop P jest *symplicjalny*. Dla $k = 0, 1, 2, \ldots, d-1$ oznaczmy przez f_k liczbę k-wymiarowych ścian wielotopu P – a więc f_0 to liczba wierzchołków, f_1 to liczba krawędzi i tak dalej. Otrzymujemy wtedy *f-wektor* wielotopu P, czyli $\underline{f} = (f_0, f_1, \ldots, f_{d-1})$. Chcielibyśmy dowiedzieć się, które wektory (o współrzędnych naturalnych) możemy uzyskać jako f-wektory wielotopów symplicjalnych.



Szkielet 16-komórki, czyli 4-wymiarowego odpowiednika ośmiościanu foremnego [Wikimedia Commons contributors. File: Quark structure proton]

Powyżej uzyskane dla $d = 3$ warunki możemy bez trudu uogólnić. Dla przykładu, jeśli wielotop jest czterowymiarowy, wzór Eulera przyjmuje postać $f_0 - f_1 + f_2 - f_3 = 0$. Z kolei zamiast powyższej równości $3F = 2E$, w analogiczny sposób dostajemy równość $4f_3 = 2f_2$, a więc $f_2 = 2f_3$. Stąd

$$\underline{f} = (f_0, f_1, 2f_1 - 2f_0, f_1 - f_0).$$

Ponadto, podobnie jak poprzednio, mamy ograniczenie $f_0 \geqslant 5$. Ale skoro $f_3 = f_1 - f_0 \geqslant 0$, to również $f_1 \geqslant f_0$. Okazuje się jednak, że zachodzi dużo silniejsza nierówność, mianowicie $f_1 \geqslant 4f_0 - 10$. Te warunki wystarczają już, aby dany wektor liczb naturalnych był f-wektorem pewnego czterowymiarowego wielotopu symplicjalnego.

Widać jednak, że wraz ze wzrostem liczby wymiarów konieczne warunki stają się coraz bardziej skomplikowane. Czy możemy liczyć na jakiś opis możliwych f-wektorów w ogólnym przypadku?

Spójrzmy, jak wcześniejsze warunki uogólniają się na dowolną liczbę wymiarów. Wzór Eulera w wyższych wymiarach mówi, że

$$f_0 - f_1 + f_2 - \cdots + (-1)^{d-1} f_{d-1} = 1 + (-1)^{d-1}.$$

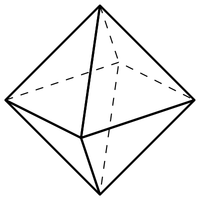
Aby udowodnić wielowymiarowy wzór Eulera, możemy postępować następująco. Jeśli usuniemy jedną z $(d-1)$-wymiarowych ścian, suma po lewej stronie zmaleje o $(-1)^{d-1}$. Jeśli będziemy teraz w odpowiedniej kolejności usuwać kolejne $d-1$-wymiarowe ściany (za każdym razem usuwając niżej wymiarowe ściany, które nie są już zawarte w żadnej $(d-1)$-wymiarowej ścianie), to za każdym razem suma po lewej stronie wzoru Eulera pozostanie niezmieniona. Na końcu zaś, gdy usuniemy ostatnią ścianę, suma zmaleje dokładnie o 1.

Mamy również analogiczne zależności $df_{d-1} = 2f_{d-2}$ oraz $f_0 \geqslant d + 1$. Ponadto, jeśli $d \geqslant 3$, to w każdym d-wymiarowym wielotopie zachodzi nierówność $f_1 \geqslant df_0 - \frac{d(d+1)}{2}$ (dla $d = 3$ zachodzi nawet równość, co pokazaliśmy w drugim akapicie). Ta nietrywialna nierówność, znana wcześniej jako hipoteza o dolnym ograniczeniu, została udowodniona w 1970 roku przez Davida Barnette. Ale okazuje się, że w ogólności warunków (zarówno nierówności, jak i równości) jest więcej.

Dla dowolnego d-wymiarowego wielotopu zdefiniujmy *h-wektor* jako $(h_0, h_1, \ldots, h_d)$, gdzie

$$h_i = f_{i-1} - \binom{d-i+1}{d-i} f_{i-2} + \binom{d-i+2}{d-i} f_{i-3} - \cdots + (-1)^i \binom{d}{d-i} f_{-1}.$$

Przyjmujemy tutaj konwencję, zgodnie z którą $f_{-1} = 1$. Dla przykładu, jeśli mamy do czynienia z ośmiościanem foremnym, to $(f_{-1}, f_0, f_1, f_2) = (1, 6, 12, 8)$



Ośmiościan foremny

i dostajemy

$$h_0 = f_{-1} = 1 \qquad h_2 = f_1 - 2f_0 + 3f_{-1} = 3$$
$$h_1 = f_0 - 3f_{-1} = 3 \qquad h_3 = f_2 - f_1 + f_0 - f_{-1} = 1,$$

a więc h-wektor to $(1,3,3,1)$.

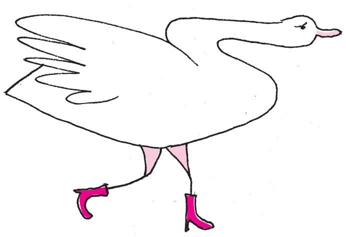
Okazuje się, że dla dowolnego symplicjalnego wielotopu tak otrzymany h-wektor zawsze jest symetryczny! Innymi słowy, $h_i = h_{d-i}$ dla $i = 0,1,2,\ldots,d$ (np. równość $h_0 = h_d$ to po prostu wzór Eulera). Równości te nazywane są *równaniami Dehna–Sommerville'a* i zostały udowodnione już w latach dwudziestych XX wieku. Ponadto można udowodnić, że pierwsza połowa h-wektora tworzy ciąg niemalejący (a druga, na mocy symetrii, tworzy ciąg nierosnący). To twierdzenie jest uogólnieniem hipotezy o dolnym ograniczeniu, która w tym języku mówi po prostu, że $h_2 \geqslant h_1$.

Przedstawione własności to ciągle za mało – istnieją spełniające je ciągi, które nie są f-wektorami żadnego wielotopu. Do sformułowania ostatecznej charakteryzacji przyda się nam następujący lemat:

Lemat. *Niech $k \geqslant 1$. Dla dowolnego $m \geqslant 1$ istnieją liczby $n_k > n_{k-1} > \ldots > n_l \geqslant l \geqslant 1$ takie, że*

$$m = \binom{n_k}{k} + \binom{n_{k-1}}{k-1} + \cdots + \binom{n_l}{l},$$

ponadto są one wyznaczone jednoznacznie.



Dowód pozostawiamy Czytelnikowi Dociekliwemu jako ćwiczenie. Polecamy zastosowanie indukcji względem k – podstawa indukcji jest trywialna, a w kroku indukcyjnym przyda się znana równość

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k-1} + \ldots + \binom{n-k}{0}.$$

Zdefiniujmy teraz $g_0 = h_0$ oraz $g_i = h_i - h_{i-1}$ dla $1 \leqslant i \leqslant \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ (zauważmy, że $g_i \geqslant 0$, skoro pierwsza połowa h-wektora tworzy ciąg niemalejący). Ustalmy $i \in \{1,2,\ldots,\lfloor \frac{d}{2} \rfloor - 1\}$ i zgodnie z lematem zapiszmy

$$g_i = \binom{n_i}{i} + \binom{n_{i-1}}{i-1} + \cdots + \binom{n_j}{j},$$

gdzie $n_i > n_{i-1} > \cdots > n_j \geqslant j \geqslant 1$. Oznaczmy

$$g_i^{<i>} = \binom{n_i+1}{i+1} + \binom{n_{i-1}+1}{i} + \cdots + \binom{n_j+1}{j+1}.$$

Rozważania z zakresu geometrii algebraicznej prowadzą do wniosku, że $g_{i+1} \leqslant g_i^{<i>}$, co może się wydawać na pierwszy rzut oka szokujące.

Zależność tę udowodnił Richard Stanley w 1980 roku, a szkic jego rozumowania można znaleźć jako załącznik do elektronicznej wersji tego artykułu (`deltami.edu.pl`). Wcześniej w tym samym roku Louis Billera i Carl Lee udowodnili, że tak uzyskane warunki są wystarczające, tzn. że każdy spełniający je ciąg jest f-wektorem pewnego wielotopu. W ten sposób dochodzimy do następującego twierdzenia, dającego ostateczną odpowiedź na postawiony przez nas problem.

Twierdzenie. *Wektor $(f_0, f_1, \ldots, f_{d-1})$ liczb naturalnych jest f-wektorem pewnego wielotopu symplicjalnego wtedy i tylko wtedy, gdy uzyskany z niego h-wektor jest symetryczny, a g-wektor ma współrzędne nieujemne i spełnia nierówności $g_{i+1} \leqslant g_i^{<i>}$ dla $i = 1,2,\ldots,\lfloor \frac{d}{2} \rfloor - 1$.*

Jeśli będziemy rozważać wszystkie wielotopy (bez ograniczania się do wielotopów symplicjalnych), to g-wektor nadal będzie miał współrzędne nieujemne. Jednak wciąż pozostaje problem otwarty: czy musi on spełniać powyższe nierówności? W ogólnym przypadku definicje h-wektora i g-wektora (zwanych wówczas *h-wektorem torycznym* i *g-wektorem torycznym*) muszą jednak zostać zmodyfikowane i są bardziej skomplikowane (w przypadku symplicjalnym pokrywają się z definicjami podanymi powyżej).

Rozwiązanie zadania M 1637.
Niech g_i i b_i będą odpowiednio liczbami dziewczynek i chłopców startujących z i-tej szkoły. Niech ponadto s będzie liczbą singli, a m liczbą miksów. Wówczas

$$s = \sum_{i<j} (g_i g_j + b_i b_j),$$
$$m = \sum_{i<j} (g_i b_j + b_i g_j),$$

skąd

$$s - m = \sum_{i<j} (g_i - b_i)(g_j - b_j) = \sum_{i<j} d_i d_j,$$

gdzie $d_i = g_i - b_i$. Z założeń zadania

$$\left|\sum_i d_i\right| < 1 \text{ oraz } \left|\sum_{i<j} d_i d_j\right| = |s-m| < 1,$$

a zatem

$$\sum_i d_i^2 = \Bigl(\sum_i d_i\Bigr)^2 - 2\sum_{i<j} d_i d_j \leqslant 3.$$

Oznacza to, że co najwyżej trzy spośród liczb d_i są różne od 0, co kończy rozwiązanie.