Przyroda geometrą

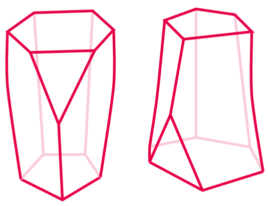
Krzysztof REJMER

Istnieje nieskończenie wiele brył geometrycznych, którymi matematycy nigdy dotąd się nie zajmowali, bo po prostu nie były one dla nich wystarczająco interesujące. Czasem jednak zdarza się, że i niematematyk natrafi na coś, co z pewnych powodów okaże się ważne, a wtedy robi się naprawdę ciekawie.

Gómez-Gálvez Pedro i inni: *Scutoids are a geometrical solution to three-dimensional packing of epithelia.* Nature Communications, **9** (1)

Tak właśnie było w tym przypadku, gdy uczeni z Uniwersytetu w Sewilli oraz Uniwersytetu Lehigh w Bethlehem (Pensylwania) zajmujący się badaniami nabłonka odkryli nieznany wcześniej kształt, jaki mogą przyjmować jego komórki, o czym w lipcu 2018 roku poinformowali w *Nature Communications*.

Tkanka nabłonkowa jest wszechobecna w żywych organizmach i spełnia w nich wielorakie funkcje. Wyściela ona jamy ciała oraz jego narządy wewnętrzne, bierze udział w transporcie cząsteczek chemicznych, tworzy skórę, pełni funkcję wydzielniczą w gruczołach dokrewnych, uczestniczy w odbieraniu bodźców z zewnętrznego otoczenia, stanowi część jąder i jajników, gdzie zachodzące w niej podziały prowadzą do powstania plemników oraz komórek jajowych. Niewątpliwym przywilejem odkrywców było nazwanie nowej bryły. Wybrali nazwę *skutoid*, a dlaczego, o tym za chwilę. Najpierw ów skutoid opiszemy. Wyobraźmy sobie graniastosłup o podstawie pięciokąta, któremu odcinamy jeden z wierzchołków w taki sposób, że powstaje dodatkowa trójkątna ściana. Skutoid to bryła bardzo zbliżona do tego, co powstało, przy czym dopuszczamy deformowanie ścian: krawędzie traktujemy tak, jakby były połączone przegubowo i dodatkowo każdą krawędź możemy rozciągać i skracać. Czyli przy deformacji nie zmieniamy własności topologicznych, każda ściana nie zmienia liczby wierzchołków, ale nie musi być już nawet płaską figurą. Skutoid ma zatem osiem ścian: jedną trójkątną, trzy czworokątne, trzy pięcio- i jedną sześciokątną. Ma osiemnaście krawędzi i dwanaście wierzchołków. Przypomnijmy jeszcze wzór Eulera:

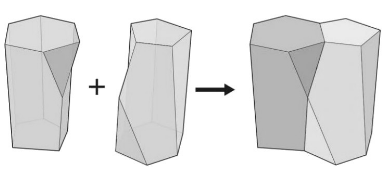


Skutoidy

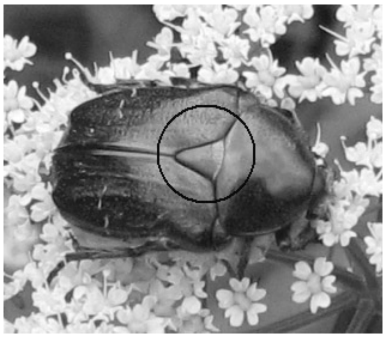
$$W + S = K + 2,$$

gdzie W, S i K to odpowiednio liczby wierzchołków, ścian i krawędzi wielościanu. Dokonana w graniastosłupie zamiana I na Y zwiększa W o 2, S o 1, a K o 3, a więc wszystko się zgadza. Naturalnie prawdziwe komórki nie są wielościanami, nie mają ostrych krawędzi ani płaskich ścian, ale możemy je w ten sposób przybliżać.

Długo przypuszczano, że komórki nabłonka przypominają kształtem graniastosłupy lub butelki. Okazuje się jednak, że mogą one być bardziej skomplikowane. Mogą być na przykład skutoidami. Dzięki temu kształtowi daje się z nich ułożyć, niczym z klocków lego, bardzo dobrze upakowaną strukturę. Rysunek 1 pokazuje dopasowanie dwóch skutoidów. Co więcej, można w ten sposób tworzyć zakrzywione i zarazem szczelne powierzchnie. Ma to podstawowe znaczenie dla morfogenezy rozwoju tkanek. Wszystko zaczyna się od jednej komórki, która się dzieli, potem następują kolejne podziały, tkanki różnicują się, tworzą warstwy i narządy. Gdy warstwy skręcają się i wyginają, muszą przy tym zmieniać kształt. Początkowo komórki są pięcio- lub sześciokątnymi graniastosłupami. Gdy tkanka rośnie i zarazem wygina się, jej górna powierzchnia powiększa swoje pole; niektóre komórki odkształcają się, a przy tym mogą być budowane nowe krawędzie i nowe ściany. Niestety zmiana pola powierzchni i ewentualne pojawienie się nowych krawędzi pociąga za sobą pewne wydatki energetyczne. Dopasowanie geometryczne to jeden istotny czynnik, drugim jest zużycie energii, niezbędny jest więc jakiś kompromis pozwalający na stworzenie stabilnego i zakrzywionego kształtu. Symulacje komputerowe pokazują, że wydatki energetyczne są stosunkowo małe, a więc korzystne dla komórek, gdy niektóre z nich przyjmują kształt skutoidów. A zatem tam, gdzie jest krzywizna, tam mogą być również skutoidy. W tytule artykułu popularnonaukowego poświęconego temu odkryciu, zamieszczonego w *New Yorkerze*, jego autor, Alan Burdick, napisał: *wszyscy jesteśmy skutoidami*.



Rys. 1. Dwa doskonale dopasowane skutoidy



Rys. 2. Scutellum kruszczycy złotawki *Cetonia aurata*.

Bardzo to piękne, ale czy aby na pewno prawdziwe? Pewien niemiecki astrofizyk onegdaj oświadczył: *Symulowalibyśmy gwiazdy nawet wtedy, gdyby one nie istniały.*

Otóż tak, tego rodzaju komórki już odkryto. Okazało się, że skutoidami jest 75% komórek nabłonkowych w gruczołach ślinowych muszki owocowej (*Drosophila melanogaster* – dla genetyków będącej prawdziwym laboratorium) i 50% komórek rozwijających się fałd zarodka owada. Wykryto je również u danio pręgowanego (*Danio rerio*), ryby, która dzięki łatwemu rozmnażaniu i szybko przebiegającemu cyklowi życiowemu także jest wdzięcznym obiektem badań.

Winien jestem jeszcze wyjaśnienie dotyczące nazwy tej nowej bryły. Autorzy odkrycia dopatrzyli się w niej pewnego podobieństwa do pancerza chrząszczy, a konkretnie do fragmentu grzbietowej części segmentu skrzydłotułowia po łacinie nazwanego *scutellum* (od *scutum* – tarcza), a po polsku *zatarczką*. Jest to niewielki trójkąt widoczny na grzbiecie chrząszcza kruszczycy złotawki, pokazany na rysunku 2.

Nieoczekiwane zastosowania szeregu harmonicznego

*Karol GRYSZKA**

* Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

Problem 1. Do dyspozycji mamy nieograniczoną liczbę prostopadłościennych cegieł o jednakowym rozmiarze i masie. Cegły ustawiamy jedna na drugiej – bez użycia żadnych materiałów klejących. Jak bardzo najwyżej położona cegła może być wysunięta w stosunku do cegły położonej najniżej? Rozkład masy w każdej cegle jest jednorodny.

Problem 2. Na jednym z końców kilometrowej rozciągliwej nici siedzi mrówka. Zaczyna poruszać się ze stałą prędkością 1 cm/s w kierunku drugiego końca. Po upływie każdej sekundy nić wydłuża się o jeden kilometr – natychmiastowo i jednorodnie na całej długości. Czy mrówka jest w stanie dotrzeć na drugi koniec nici?

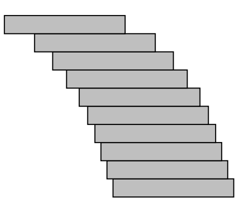
Zanim przedstawimy rozwiązania, przypomnijmy, że *szereg harmoniczny*, suma odwrotności kolejnych liczb naturalnych

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k},$$

jest *rozbieżny*, czyli jego suma jest nieskończona. Wynika to z następujących oszacowań

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^N-1}=\left(\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{N-1}}+\ldots+\frac{1}{2^{N-1}}\right)>$$
$$>\left(\frac{1}{2}\right)+\underbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)}_{\frac{1}{2}}+\ldots+\underbrace{\left(\frac{1}{2^N}+\ldots+\frac{1}{2^N}\right)}_{\frac{1}{2}}=\frac{N}{2}.$$

Rozbieżność tego szeregu odgrywa kluczową rolę w rozwiązaniach obu problemów.



Rys. 1

Rozwiązanie problemu 1. Chcemy ustawić wieżę, której najwyższa cegła będzie wystawała możliwie daleko. Eksperymentując, na przykład z kostkami domino, możemy zauważyć, że niższe kostki warto wysunąć mniej niż te wyższe; wyższe mają „swobodę”, gdyż muszą utrzymać na sobie mniej kostek (rys. 1).

Przyjmijmy, że każda cegła ma długość 2. Masa cegieł jest rozłożona jednorodnie, tak że środek ciężkości znajduje się dokładnie w połowie długości cegły. Jakie wysunięcie można osiągnąć w ten sposób z czterech cegieł? Odwróćmy kolejność budowania i zacznijmy od cegły najwyższej – niech każda nowa cegła będzie dokładana na **spód** wieży z jej prawej strony.

„Z prawej strony” oznacza, że lewy koniec podkładanej cegły ma współrzędną większą niż lewy koniec cegły bezpośrednio nad nią.