KĄCIK POCZĄTKUJĄCEGO OLIMPIJCZYKA 6

Jak przechytrzyć stereometrię

Bartłomiej BZDĘGA

Zadania z geometrii przestrzennej potrafią przysporzyć problemów, ale niektóre z nich można z powodzeniem sprowadzić do zadań z planimetrii. Najprotszą metodą jest rozważenie pewnego przekroju danej w zadaniu bryły. Jeśli zauważymy, że sporo punktów występujących w treści zadania leży na wspólnej płaszczyźnie, to rozważenie przekroju tą płaszczyzną daje realne szanse na rozwiązanie. Ćwiczymy to w zadaniach 1 i 2. Dobrze jest wykonać osobny rysunek dla wybranego przekroju – można wtedy więcej dostrzec.

W szkole składamy wielościany z ich siatek. Czasem warto zrobić na odwrót, a wtedy z obiektu przestrzennego otrzymamy łatwiejszy do analizy obiekt płaski. Takie podejście przynosi efekt w zadaniach 4 i 6. W szczególności dobrym pomysłem jest wyprostowanie pewnego kąta dwuściennego wielościanu, co pozwala dwie sąsiednie ściany i ich wspólną krawędź potraktować jako wielokąt i przekątną. Zadania 3 i 5 nadają się do tego wyśmienicie.

Rzut prostokątny na płaszczyznę Π jest przekształceniem, w którym każdemu punktowi P przyporządkujemy taki punkt $P' \in \Pi$, że $PP' \perp \Pi$. Jeśli A' i B' są rzutami prostokątnymi punktów, odpowiednio, A i B na płaszczyznę Π oraz prosta AB przecina tę płaszczyznę w punkcie K, to trójkąty prostokątne $AA'K$ i $BB'K$ są podobne, a ponadto punkty A', B' i K leżą na jednej prostej. Można zrobić z tego użytek, rozwiązując zadania 7 i 8.

Zadania

1. Okrąg o jest częścią wspólną sfer s i s'. Trzy różne punkty A, B i C leżą na okręgu o. Punkt P leży na sferze s, na zewnątrz sfery s'. Prosta PA przecina sferę s' w punkcie $A' \neq A$; analogicznie określamy punkty B' i C'. Dowieść, że płaszczyzna Π, przechodząca przez punkt P i styczna do sfery s, jest równoległa do płaszczyzny $A'B'C'$.
2. Dany jest czworościan $ABCD$. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Punkt K leży na odcinku AD i spełnia warunek
$$\frac{|AK|}{|KD|} = \frac{|AB| + |BC| + |CA|}{|BC|}.$$
Proste AI i BC przecinają się w punkcie L. Dowieść, że prosta KL przechodzi przez środek odcinka DI.
3. Prostopadłościan ma krawędzie długości a, b i c. Wyznaczyć najkrótszą drogę łączącą dwa przeciwległe wierzchołki tego prostopadłościanu, biegnącą po jego powierzchni.
4. Suma miar kątów płaskich przy wierzchołku nienależącym do podstawy ostrosłupa jest równa $60°$. Dowieść, że obwód podstawy tego ostrosłupa jest nie mniejszy od długości każdej jego bocznej krawędzi.
5. W czworościanie $ABCD$ zachodzą równości
$$|AB| = |CD| \quad \text{i} \quad |\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle BCD| = 180°.$$
Dowieść, że $|\sphericalangle BAD| > |\sphericalangle ADC|$.
6. Odcinek DD' jest wysokością czworościanu $ABCD$, w którym zachodzą równości
$$|AB| = |CD|, \quad |AC| = |BD| \quad \text{i} \quad |AD| = |BC|.$$
Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, zaś S środkiem ciężkości tego trójkąta. Dowieść, że punkty D', O i S leżą na jednej prostej.
7. Prosta przechodząca przez środek J sfery wpisanej oraz środek O sfery opisanej na czworościanie $ABCD$ przecina krawędź AB. Wykazać, że miary kątów ACB i ADB są równe lub sumują się do $180°$.
8. W czworościanie $ABCD$ wszystkie wewnętrzne kąty dwuścienne są ostre. Punkt S leży wewnątrz tego czworościanu, a jego odległość od każdej z płaszczyzn ABC, BCD, CDA i DAB jest większa niż 1. Dowieść, że przynajmniej dwa spośród odcinków AS, BS, CS, DS mają długość większą niż $\sqrt{5}$.

Wskazówki do zadań

1. Rozważmy przekrój płaszczyzną ABP. Oznaczmy przez ℓ_c prostą będącą częścią wspólną płaszczyzn Π i ABP. Rachunek na kątach dowodzi, że $\ell_c \parallel A'B'$. Analogicznie, dla przekroju płaszczyzną PBC można dowieść, że $\ell_a \parallel B'C'$.

2. Najpierw dowodzimy, że $\frac{|AL|}{|IL|} = \frac{|AB|+|BC|+|CA|}{|BC|}$. Teraz wystarczy zastosować twierdzenie Menelaosa dla trójkąta ADI i prostej KL.

3. Wyprostujmy kąt dwuścienny przy krawędzi c, otrzymując z sąsiadujących ścian prostokąt o bokach c i $a+b$. Poszukiwana najkrótsza droga wiedzie po linii prostej, czyli wzdłuż przekątnej tego prostokąta. Jej długość to $\sqrt{c^2 + (a+b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab}$. Dwa analogiczne wyniki otrzymamy dla krawędzi a i b, więc powyższa droga jest najkrótsza, jeśli $c \geqslant a, b$.

4. Rysując siatkę powierzchni bocznej tego ostrosłupa, otrzymamy wielokąt $SA_0A_1 \ldots A_n$, w którym $|A_0S| = |A_nS|$ i $|\sphericalangle A_0SA_n| = 60°$. Z tego wynika, że trójkąt A_0A_nS jest równoboczny. Brzeg podstawy ostrosłupa na narysowanej siatce jest łamaną $A_0A_1 \ldots A_n$.

5. Czworokąt powstały po wyprostowaniu kąta pomiędzy ścianami ABD i CBD jest trapezem równoramiennym.

6. Siatką takiego czworościanu jest trójkąt $D_aD_bD_c$, w którym punkty A, B i C są środkami odcinków odpowiednio D_bD_c, D_cD_a i D_aD_b. Punkt D' jest ortocentrum trójkąta $D_aD_bD_c$. Wystarczy skorzystać z twierdzenia o prostej Eulera.

7. Rozważmy rzuty J_1 oraz O_1 punktów J oraz O na płaszczyznę ABC, analogicznie J_2 oraz O_2 na płaszczyznę ABD. Ponieważ $|JJ_1| = |JJ_2|$, otrzymujemy $|OO_1| = |OO_2|$. Dalej, z twierdzenia Pitagorasa, okręgi opisane na ścianach ABC i ABD mają równe promienie. Teza wynika z twierdzenia sinusów.

8. Rzutując prostokątnie punkt P na płaszczyznę ABC, otrzymamy punkt P' leżący wewnątrz trójkąta ABC, którego odległość od każdego z boków tego trójkąta jest większa od 1. Któryś z kątów trójkąta ABC, powiedzmy kąt A, ma miarę nieprzekraczającą $60°$. Stąd $|AP'| > 2$. Mamy też $|PP'| > 1$, więc z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta APP' otrzymamy $|AP| > \sqrt{5}$. Powtarzając to rozumowanie dla płaszczyzny BCD, otrzymamy tezę.