# mała delta

## Niemożliwe!

– Lolek, chodź, pokażę Ci jedną stronę w Internecie…

– No, co tam masz? Bolek, wyłącz tego Reksia. Mama mówiła, że nie wolno nam oglądać konkurencji!

– Nie, nie to. Tutaj, w drugiej zakładce. Ktoś na tym forum napisał fajne zadanie. Czytaj.

*– Jeżeli sześcian w przestrzeni ma wszystkie wierzchołki w punktach kratowych, to jego krawędź ma całkowitą długość.*

Zacząłbyś czytać jakieś porządne fora. Przecież to jest oczywista bzdura.

– Niby czemu?

– Bolek, nie widzisz, skąd to się wzięło? Ktoś pomyślał, że taki sześcian musi mieć krawędzie równoległe do osi współrzędnych. I wtedy to prawda. Ale przecież można wziąć obrócony sześcian, o, zaraz Ci taki jeden narysuję. Proszę! Ma wierzchołki w punktach kratowych? Ma!

– Loluś, ale on akurat ma krawędź całkowitej długości…

– No nie żartuj… $\sqrt{8^2+4^2+1^2} = \sqrt{81} = 9$… rzeczywiście! Patrz, jak mi się przyfarciło! Ale chyba widzisz, że można trochę poeksperymentować ze współrzędnymi i przykład wyjdzie. Poza tym *moralnie* to nie może być prawda.

– Moralnie?

– Tak, bo na płaszczyźnie to nieprawda. Zdanie *jeżeli kwadrat na płaszczyźnie ma wszystkie wierzchołki w punktach kratowych, to jego bok ma całkowitą długość* jest fałszywe: bez problemu można narysować taki kwadrat o boku $\sqrt{5}$ albo nawet $\sqrt{2}$.

– I jak to się ma do sześcianu?

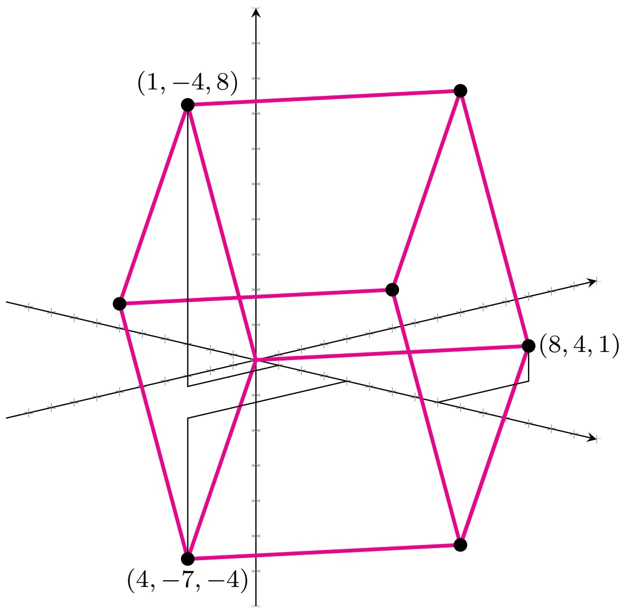
– Tak od razu to nijak. Ale mówiłem, że to moralny argument: skoro na płaszczyźnie analogiczne twierdzenie nie zachodzi, to co dopiero w przestrzeni, gdzie można dużo dowolniej manipulować współrzędnymi!

– Mnie te moralne argumenty jakoś nie przekonują. Na prostej wszystko gra.

– Na prostej?

– No tak, zobacz: *jeżeli odcinek na prostej ma oba końce w punktach kratowych, to jego długość jest liczbą całkowitą.*

– Teraz to ale Amerykę odkryłeś… Dobra, już dobra, skonstruuję Ci precyzyjny kontrprzykład.




Jaką długość krawędzi byś chciał?

– To ja poproszę $\sqrt{117} = 3\sqrt{13}$.

– Ambitnie! Ale dobra, niech będzie. Więc tak: jeden wierzchołek będzie w punkcie $0 = (0,0,0)$, następny w jakimś punkcie odległym o $\sqrt{117}$, na przykład… $u = (10,4,1)$. Teraz zgadniemy sobie jakiś wektor $v$ prostopadły do $u$ i tej samej długości. Powiedzmy, no… czekaj… mam: $v = (2,-7,8)$.

– Na pewno są prostopadłe?

– Nie wierzysz mi? Odległość między ich końcami wynosi

$$|u - v| = \sqrt{(10-2)^2 + (4+7)^2 + (1-8)^2} = \sqrt{234}$$

i mamy

$$|u|^2 + |v|^2 = \sqrt{117}^2 + \sqrt{117}^2 = \sqrt{234}^2 = |u - v|^2,$$

więc kąt między $u$ i $v$ jest prosty z twierdzenia Pitagorasa.

– Chyba z twierdzenia odwrotnego do...

– Cicho siedź! Pedant się znalazł. Poza tym łatwo sprawdzić, że Twoje pytanie sprowadza się do obliczenia *iloczynu skalarnego*

$$\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 10 \cdot 2 + 4 \cdot (-7) + 1 \cdot 8 = 0.$$

Skoro wyszło 0, to kąt jest prosty. Uczyłem się o tym na matematyce. Więc podsumujmy: punkty $0, u, v$ i $u + v = (12, -3, 9)$ wyznaczają kwadrat o boku $\sqrt{117}$. Zgadza się?

– Na razie dobrze.

– To będzie podstawa naszego sześcianu. Teraz wystarczy znaleźć trzeci wektor $w$, prostopadły do obu $u$ i $v$. Ugh... to chyba potrwa. Przynieś coś do picia.

– Czekaj, o tym to ja się uczyłem na fizyce. To się nazywa *iloczyn wektorowy* $u \times v$. Podstawia się dwa wektory i wychodzi wektor prostopadły do nich obu, czyli w Twojej notacji $\langle u \times v, u\rangle = \langle u \times v, v\rangle = 0$. Chcesz wzór?

– Dawaj!

– Mam go tu w zeszycie. Uwaga: $u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$.

– Trochę długi, ale to nic, podstawiamy: $u \times v = (39, -78, -78)$. To już, bierzemy wektory $u$, $v$ i $u \times v$ i rozpinamy na nich sześcian! A nie mówiłem!

– Za bardzo się rozpędziłeś. Ten Twój „sześcian” to tylko prostopadłościan. Trzeci wektor ma długość $\sqrt{39^2 + (-78)^2 + (-78)^2} = \sqrt{13689} = 117$, a nie $\sqrt{117}$. Zapomniałem Ci powiedzieć: długość wektora $u \times v$ jest równa polu równoległoboku rozpiętego przez $u$ i $v$.

– Czyli w naszym przypadku polu kwadratu: $\sqrt{117} \cdot \sqrt{117} = 117$. To by się nawet zgadzało. Ehhh... Ale zaraz, nie wystarczy przeskalować ten wektor? Kierunek jest przecież dobry, tylko długość się nie zgadza!

– Bingo! Mamy wektor o długości 117, a chcieliśmy $\sqrt{117}$, czyli trzeba każdą współrzędną podzielić przez $\sqrt{117}$! No nie... to niedobrze. Wychodzi $(\sqrt{13}, -2\sqrt{13}, -2\sqrt{13})$. To nie jest punkt o współrzędnych całkowitych.

– Widzę właśnie. No trudno. Pierwsze koty za płoty. Weźmiemy jakieś inne $u$ i $v$. A jak znowu się nie uda, to zmienimy ten $\sqrt{117}$ na $\sqrt{13}$ albo $\sqrt{257}$ i na pewno w końcu znajdziemy dobry przykład. A tak w ogóle, to czemu ja mam się męczyć? Bolek, Ty miałeś informatykę, weź to zaprogramuj i niech komputer szuka. W jakim języku wy się tam uczycie?

– W COBOLu. Ale wiesz co, to chyba nie jest najlepszy pomysł...

– Bo co? Paru prostych pętli w COBOLu nie umiesz napisać? Nie bądź cienias!

– Nie no, umiem. Ale to chyba nic nie da, bo ja już widzę jak to się skończy.

– To weź mnie oświeć...

– Powiedzmy, że będziemy chcieli zrobić taką konstrukcję, biorąc za krawędź $\sqrt{13}$ albo $\sqrt{257}$, albo w ogóle $\sqrt{n}$ dla jakiegoś naturalnego $n$. Wybierzemy dwa prostopadłe wektory $u$ i $v$ długości $\sqrt{n}$ i całkowitych współrzędnych tak jak Ty...

– Wybierzemy albo i nie. Skąd wiesz, że zawsze się da?

– Nieważne, jak się nie da, to i tak nici z konstrukcji, więc powiedzmy, że się udało. Teraz obliczasz wektor $u \times v$ i tak jak poprzednio, on ma współrzędne całkowite i długość $\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$. Czyli jest za długi, bo miało być $\sqrt{n}$. Więc musimy go skrócić $\sqrt{n}$ razy, bo tylko tam może być trzeci wierzchołek sześcianu…

– Nie tylko tam, jeszcze po przeciwnej stronie!

– Teraz to Ty jesteś pedantem. Znak nic nie zmieni, bo tak czy inaczej wektor $(u \times v)/\sqrt{n}$ nie ma współrzędnych całkowitych, tylko niewymierne, bo wszędzie się kręci ten nieszczęsny $\sqrt{n}$!

– Chyba że…

– Że co?

– …że $\sqrt{n}$ jest całkowity. Na przykład $\sqrt{25}$ albo $\sqrt{36}$!

– Czyli już! No bo tak jakby pokazaliśmy, że nie da się skonstruować kontrprzykładu. A to chyba to samo, co udowodnić twierdzenie?

– Tak myślę. Weź, zapiszmy to jakoś zgrabnie i możemy opublikować na tym forum.

– Nie ma sensu, tam już jest jedno rozwiązanie.

– Tam już jest… Co? Bolek, Ty mnie zapędzasz w kozi róg, a tam już czeka gotowe rozwiązanie?! Czekaj, jak ja cię dorwę…

– Lolek, czekaj, ała! To nie tak! Bo ja tego rozwiązania z forum tak do końca nie rozumiem! Ono jest jakieś magiczne. Twoje jest dużo lepsze.

– Dobra, przeczytajmy razem, co oni tam piszą. *Objętość sześcianu o krawędzi* $\sqrt{n}$ *wynosi* $V = \sqrt{n}^3$. Na razie chyba wszystko jasne?

– Tak, tak. Ale patrz dalej: *Ponieważ wszystkie wierzchołki mają współrzędne całkowite, więc objętość* $V$ *jest liczbą całkowitą.* Tego do końca nie rozumiem. Dalej już jest łatwo: *Z równości* $V^2 = n^3$ *wynika, że* $n$ *jest kwadratem liczby całkowitej, czyli krawędź* $\sqrt{n}$ *jest całkowita.*

– Faktycznie magia. To jak to jest z tą objętością? Jest jakiś oczywisty powód, że sześcian o wierzchołkach w punktach kratowych musi mieć całkowitą objętość?

– Trochę o tym myślałem i wydaje mi się, że to może być prawda nawet dla dowolnego równoległościanu. Bo, na przykład, na płaszczyźnie wszystko działa: wzór na pole równoległoboku rozpiętego przez wektory $u = (u_1, u_2)$ i $v = (v_1, v_2)$ to $|u_1 v_2 - u_2 v_1|$, więc dla współrzędnych całkowitych wynik jest liczbą całkowitą. W przestrzeni też powinien być podobny wzór na objętość. Prawda?

– Wiesz co, Bolek?

– No co?

– Myślałem, że Ciebie nie ruszają takie *moralne* argumenty.

1. Zapisz zgrabnie rozwiązanie Bolka i Lolka.
2. Czy Bolek mógłby wybrać takie $\sqrt{n}$, żeby Lolek potknął się już przy próbie znalezienia wektora $u$?
3. Czy Bolek mógłby wybrać takie $\sqrt{n}$, żeby Lolek nie mógł dobrać do $u$ żadnego wektora $v$?
4. Znajdź wzór na objętość równoległościanu rozpiętego przez trzy wektory. Podpowiedź: wyznacznik. Korzystając z niego, uzasadnij ostatnią obserwację Bolka.
5. Czy rozwiązanie Bolka i Lolka i rozwiązanie znalezione na forum są istotnie różne, czy może to tylko dwa wcielenia tego samego pomysłu?

*Małą Deltę przygotował Michał ADAMASZEK*

**Rozwiązanie zadania F 939.**
Siła oporu $F_{op}$, z jaką powietrze działa na ciało poruszające się z prędkością $v$ wynosi

$$F_{op} = \frac{1}{2} C \rho S v^2,$$

gdzie $\rho$ jest gęstością powietrza, $S$ polem powierzchni przekroju ciała (prostopadłego do kierunku ruchu), a $C$ współczynnikiem zależnym od kształtu ciała o wartości rzędu 1 (od 0,1 do 1). W dobrym przybliżeniu powietrze spełnia równanie stanu gazu doskonałego. Korzystając z tego równania dla danych zadania, otrzymujemy (dla temperatury w skali Kelvina $T = 293\,\mathrm{K}$):

$$\rho = \frac{p\mu}{RT} \approx 1{,}2\,\mathrm{kg/m^3}.$$

Przyjmijmy, że szerokość ciała skoczka wynosi średnio 30 cm – w ramionach na pewno więcej, ale za to dla nóg mniej, co dla wzrostu 1,8 m daje $S \approx 0{,}54\,\mathrm{m}^2$. Maksymalna prędkość odpowiada sytuacji, gdy siła oporu $F_{op} = mg$. Po podstawieniu powyższych oszacowań do równania otrzymujemy

$$v = \sqrt{\frac{2mg}{C\rho S}} \approx 50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 180\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

Podczas zawodów, przy skokach z wysokości około 2000 m po około 12 s skoczkowie osiągają stałe prędkości około 190 km/h bliskie otrzymanej w rozwiązaniu.

**Rozwiązanie zadania F 940.**
Podczas narastania indukcji pola magnetycznego w pierścieniu pojawia się siła elektromotoryczna $\mathcal{E}$. Zgodnie z prawem indukcji Faradaya mamy

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

gdzie $\Phi$ oznacza strumień indukcji przez powierzchnię cewki. Oznacza to, że w każdym punkcie pierścienia, stycznie do niego, na ładunki działa pole elektryczne o wartości $E = \mathcal{E}/(2\pi r)$, gdzie $r$ jest promieniem pierścienia. Liniowa gęstość ładunku na pierścieniu wynosi $\rho = Q/(2\pi r)$, a więc na odcinek $dl$ pierścienia działa siła $dF = \rho E\,dl$ i moment siły względem jego środka to $dM = r\,dF = r\rho E\,dl$. Całkowity moment siły „obracający” pierścień wynosi $M = 2\pi r^2 \rho E$. Ten moment siły nadaje pierścieniowi przyspieszenie kątowe $d\omega/dt = M/I$, gdzie $I = mr^2$ jest momentem bezwładności pierścienia. Otrzymujemy więc

$$\frac{d\omega}{dt} = -2\pi r^2 \frac{Q}{2\pi r} \frac{1}{2\pi r^3 m} \frac{d\Phi}{dt} = -2\pi r^2 \frac{Q}{2\pi r} \frac{1}{2\pi r^3 m} \frac{\pi r^2 dB}{dt}.$$

Ostatnia równość wynika z definicji strumienia jednorodnego pola $B$ przez pole koła. Po uproszczeniu powtarzających się czynników dostajemy:

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{Q}{2m} \frac{dB}{dt}$$

i ze względu na początkowe wartości $\omega = 0$ oraz $B = 0$, ostatecznie otrzymujemy $\omega = QB_0/(2m)$.