Najpiękniejsze zadanie geometryczne

Polecam dostępne w sieci książki Szarygina
I.F. Sharygin
Problems in Plane geometry
i
Problems in Solid Geometry

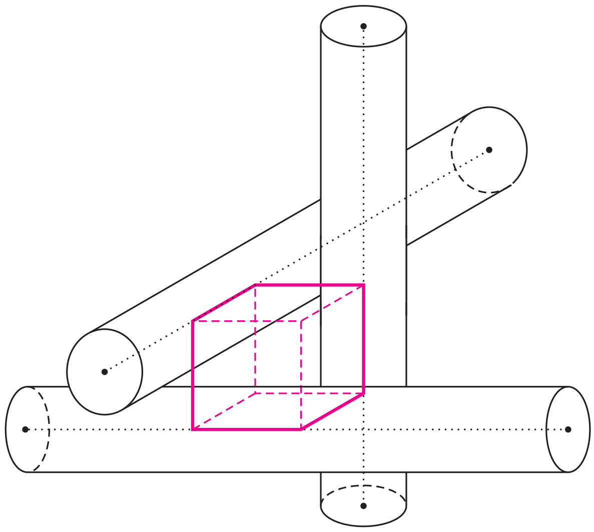
Znam takie zadanie. Jego autorem jest Igor Fiodorowicz Szarygin.

Jego treść jest nieskomplikowana:

jak szeroki walec można włożyć pomiędzy trzy jednakowe, parami prostopadłe walce?

Purysta zażądałby doprecyzowania. Ale człowiek rozsądny nie będzie miał wątpliwości, że chodzi o rezultat ekstremalny, a więc o najmniej korzystną dla wkładanego walca sytuację. A więc walce o osich parami prostopadłych mają być styczne (bo wtedy miejsca na wkładany walec będzie najmniej).

W rozwiązaniu tego zadania kluczowe jest dostrzeżenie w danych trzech walcach sześcianu. Odkrywa się jego istnienie w następujący sposób.

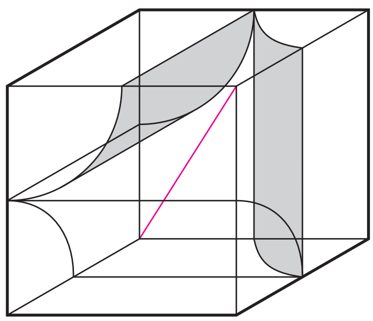


Rys. 1

Osie dwóch walców to proste skośne. Dla prostych skośnych zaś istnieje łączący je odcinek prostopadły do obu z nich – to najkrótsze ich połączenie.

Tu dygresja dla niedowiarków. Gdy proste k i l są skośne, przez dowolny punkt prostej k prowadzimy prostą l' równoległą do l, a przez dowolny punkt prostej l prostą k' równoległą do k. Płaszczyzny λ zawierająca proste k i l' oraz μ zawierająca proste l i k' są równoległe. Płaszczyzna π zawierająca prostą k i prostopadła do λ i płaszczyzna ρ zawierająca prostą l i prostopadła do płaszczyzny μ przecinają się wzdłuż odcinka łączącego k z l i prostopadłego do nich obu. Nieprawdaż?

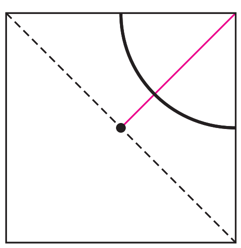
Odcinki prostopadłe łączące osie walców dla stycznych walców o promieniu R mają więc długość $2R$. Co więcej, ich końce na każdej z osi walców są odległe też o $2R$ – połączmy je. Powstaje w ten sposób łamana złożona z sześciu odcinków (na rysunku 1 ciągłe odcinki kolorowe). Uzupełnienie jej do sześcianu nie sprawi nikomu kłopotu.



Rys. 2

Sześcian ten zawiera w sobie wszystko, co może mieć związek z wkładanym między walce poszukiwanym walcem. Jeśli narysujemy (wyobrazimy sobie), co się dzieje we wnętrzu sześcianu, zobaczymy trzy „ćwiartki” walców (rys. 2). Tu następne kluczowe (ile jeszcze tych kluczy?) spostrzeżenie – te ćwiartki mają oś obrotową: prosta łącząca dorysowane na rysunku 1 wierzchołki sześcianu ma tę własność, że obracając wokół niej owe ćwiartki (można to robić razem z sześcianem), otrzymujemy tę samą sytuację. Zauważmy, że owa oś jest też osią obrotową dla danych na początku walców. Jest ona, oczywiście, jednakowo odległa od każdej z ćwiartek, a każda inna prosta, biegnąca między ćwiartkami, jest w mniejszej odległości od co najmniej jednej z nich.

Tak więc znaleźliśmy oś poszukiwanego walca, a jego promień to jej odległość od którejkolwiek z ćwiartek.



Rys. 3

No to kolejne kluczowe spostrzeżenie: przy zrzutowaniu w kierunki równoległym do powierzchni ćwiartki odległość jej od osi nie powiększa się. I tak nasze stereometryczne zadanie zredukowało się do zadania płaskiego (rys. 3): jaka jest odległość przekątnej kwadratu u boku $2R$ od okręgu mającego środek w wierzchołku kwadratu i promień R.

To, że wynikiem jest $(\sqrt{2}-1)R$, nie budzi wątpliwości.

Zadanie to podziwiam dlatego, że prezentuje rzecz dla mnie w matematyce najpiękniejszą – redukcję zawiłości do sedna sprawy.

Marek KORDOS