# Budowle z klocków

*Joanna JASZUŃSKA*

Wiele zadań przestrzennych łatwiej rozwiązać, gdy najpierw zbada się analogiczny problem płaski. Taki dwuwymiarowy odpowiednik czasem sam się narzuca, a czasem jego sformułowanie wymaga pewnej pomysłowości. Poniżej prezentujemy przykłady zadań o przestrzennych klockach, na różne sposoby „spłaszczane”.

**1.** Czy z prostopadłościennych klocków o wymiarach $2\times3\times3$ można ułożyć prostopadłościan o wymiarach $8\times8\times9$?

**2.** Z kostek domina o wymiarach $2\times1$ ułożono szachownicę $6\times6$. Wykaż, że istnieje taka prosta równoległa do jednego z boków szachownicy i przechodząca przez jej wnętrze, która nie rozcina żadnej z kostek domina.

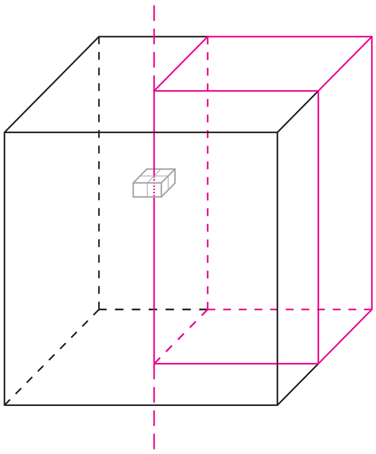
**3.** Z klocków o wymiarach $2\times2\times1$ zbudowano sześcian $20\times20\times20$. Wykaż, że istnieje taka prosta równoległa do jednej z krawędzi sześcianu i przechodząca przez jego wnętrze, która nie przecina wnętrza żadnego z klocków.

**4.** Udowodnij, że po usunięciu z kwadratu o krawędzi $2^n$ dowolnego spośród $(2^n)^2$ tworzących go kwadratów jednostkowych powstaje figura, którą daje się szczelnie wypełnić *klockami* , zbudowanymi z trzech kwadratów jednostkowych.

**5.** *Klockiem* nazwiemy bryłę otrzymaną przez usunięcie z sześcianu o krawędzi 2 jednego spośród ośmiu sześcianów jednostkowych, z których jest on zbudowany. Udowodnij, że po usunięciu z sześcianu o krawędzi $2^n$ dowolnego spośród $(2^n)^3$ tworzących go sześcianów jednostkowych powstaje bryła, którą daje się szczelnie wypełnić klockami.

## Rozwiązania niektórych zadań

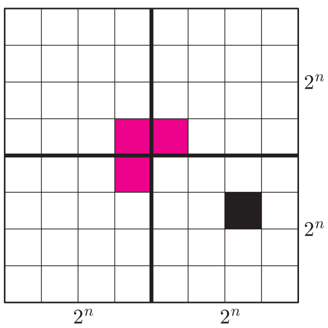
**R1.** Przyda się tu „spłaszczenie” polegające na spojrzeniu na ścianę $8\times8$ prostopadłościanu $8\times8\times9$. Gdyby dało się zbudować go z opisanych w zadaniu klocków, ściana ta byłaby zbudowana z prostokątów o wymiarach $2\times3$ oraz $3\times3$. Jednak to jest niemożliwe, gdyż figura złożona z takich prostokątów ma pole podzielne przez 3, a tymczasem ściana $8\times8$ ma pole równe 64. □



Rys. 1. Kolorowy prostopadłościan i szary klocek przebity prostą.

**R3.** Prostych równoległych do pewnej krawędzi sześcianu, przechodzących przez jego wnętrze i biegnących wzdłuż linii podziału na kostki jednostkowe jest po $19\cdot19$ w każdym z trzech kierunków, a więc łącznie $3\cdot361=1083$.

Załóżmy, że któraś z nich przebija nieparzystą liczbę klocków. Rozważmy prostopadłościan wyznaczony, w sposób przedstawiony na rysunku 1, przez tę prostą i dowolną równoległą do niej krawędź sześcianu. Wówczas objętość tego prostopadłościanu byłaby nieparzysta, bo zawierałby on po jednej kostce jednostkowej z każdego z przebitych klocków, a pozostałe klocki w całości lub po połowie. Liczba ta jest jednak jednocześnie wielokrotnością 20 (z uwagi na rozmiar sześcianu), co jest niemożliwe.




Rys. 2. Na czarno oznaczono usunięty kwadrat jednostkowy.

Zauważmy, że każdy klocek $2\times2\times1$ może być przebity przez najwyżej jedną z rozważanych prostych. Gdyby każda z nich przebijała co najmniej dwa klocki, to łącznie przebijałyby one co najmniej $2\cdot1083=2166$ klocków. To także jest niemożliwe, gdyż klocków jest łącznie $20\cdot20\cdot20/4=2000$. Wobec tego któraś z rozważanych prostych nie przechodzi przez żaden klocek. □

**R4.** Przeprowadzimy dowód indukcyjny. Dla $n=1$ teza jest prawdziwa: rozważana figura jest pojedynczym klockiem. Załóżmy, że teza zachodzi dla pewnego $n$. Niech $K$ będzie kwadratem o krawędzi $2^{n+1}$, z którego usuwamy jedno pole. Podzielmy $K$ na cztery przystające mniejsze kwadraty o krawędzi $2^n$, jeden z nich zawiera usunięte pole. Umieśćmy pojedynczy klocek na środku kwadratu $K$ w sposób przedstawiony na rysunku 2. Wówczas na mocy założenia indukcyjnego każdy z czterech mniejszych kwadratów bez jednego pola da się szczelnie wypełnić klockami, co kończy dowód. □

Zadanie 1 pochodzi z XI Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów, zadanie 3 z *Ligi 44* (nr 409), a zadanie 5 z L OM.