$w - k + s = 2$

Joanna JASZUŃSKA

Oznaczmy przez w, k, s liczby odpowiednio wierzchołków, krawędzi i ścian wielościanu. W każdym wierzchołku schodzą się co najmniej trzy końce krawędzi i każda krawędź ma dwa końce, zatem $2k \geqslant 3w$. Podobnie każda ściana ma co najmniej trzy boki, a każda krawędź należy do dwóch ścian, więc $2k \geqslant 3s$. Ponadto jeśli wielościan jest wypukły, zachodzi *wzór Eulera*: $w - k + s = 2$.

Wzór ten zachodzi również dla spójnych grafów planarnych (więcej o tym w *deltoidzie* 8/2011). Na stronie `http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler` spisano 20 jego dowodów.

Można wykazać, że jeśli dodatnie liczby całkowite w, k, s spełniają powyższe trzy warunki oraz $w \geqslant 4$, to istnieje wielościan wypukły o w wierzchołkach, k krawędziach i s ścianach. Dowód tego i podobnych faktów opisano w *Delcie* 8/2015.

1. Czy istnieje wielościan o 333 ścianach, z których każda jest trójkątem?

2. Czy istnieje wielościan o 7 krawędziach?

3. Czy istnieje wielościan wypukły mający k krawędzi oraz płaszczyzna nie przechodząca przez żaden z jego wierzchołków i przecinająca r krawędzi, przy czym $3r > 2k$?

4. Czy istnieje wielościan wypukły, w którym $wks = 3^9$?

5. Udowodnij, że w każdym wielościanie wypukłym $2w - s \geqslant 4$, $2s - w \geqslant 4$, $3w - k \geqslant 6$ oraz $3k - w \geqslant 6$.

6. Pewien wielościan wypukły ma w wierzchołków. Oblicz sumę kątów płaskich wszystkich jego ścian.

7. Udowodnij, że każdy wielościan wypukły ma ścianę trójkątną lub naroże trójścienne.

8. Wykaż, że w każdym wielościanie wypukłym suma liczby ścian trójkątnych i liczby naroży trójściennych jest większa lub równa 8.

9. Krawiec ma worek płaskich pięciokątów foremnych o boku 1 oraz worek płaskich sześciokątów foremnych o boku 1. Jakie wielościany wypukłe może z nich uszyć?

10. Jakie istnieją wielościany foremne wypukłe?

Rozwiązania

R1. Jeśli każda ściana jest trójkątem, to zachodzi równość $2k = 3s = 3 \cdot 333$, co jest niemożliwe. □

R2. Ponieważ $2k \geqslant 3w$, wielościan o 7 krawędziach miałby najwyżej 4 wierzchołki, a więc najwyżej 6 krawędzi – sprzeczność. □

R3. Jeśli płaszczyzna przecina r krawędzi, to przekrój ma r boków i płaszczyzna ta przecina także r różnych ścian (bo wielościan jest wypukły). Stąd $s \geqslant r$, więc $2k \geqslant 3s \geqslant 3r$, zatem niemożliwe, by $3r > 2k$. □

R4. Jeśli wks jest liczbą nieparzystą, to liczby w, k, s są nieparzyste, a więc niemożliwe, by $w - k + s = 2$. □

R5. Na mocy wzoru Eulera oraz nierówności $2k \geqslant 3s$ uzyskujemy $2w - s = 2 \cdot (2 + k - s) - s = 4 + 2k - 3s \geqslant 4$. Pozostałych nierówności dowodzimy analogicznie. □

R6. Niech k_i oznacza liczbę krawędzi ściany i dla $i = 1, 2, \ldots, s$, wówczas $k_1 + k_2 + \ldots + k_s = 2k$. Suma kątów płaskich ścian wielościanu równa jest

$$\sum_{i=1}^{s}((k_i - 2) \cdot 180^\circ) = \left(\sum_{i=1}^{s} k_i - 2s\right) \cdot 180^\circ = (2k - 2s) \cdot 180^\circ = (k - s) \cdot 360^\circ = (w - 2) \cdot 360^\circ. \ \square$$

R7. Jeśli nie ma, to $2k \geqslant 4s$ oraz $2k \geqslant 4w$, zatem $2 = w - k + s \leqslant \frac{k}{2} - k + \frac{k}{2} = 0$, sprzeczność. □

R8. Oznaczmy przez s_i liczbę ścian i-kątnych, a przez w_i liczbę naroży i-ściennych ($i \geqslant 3$).

Wtedy $s = s_3 + s_4 + s_5 + \ldots$, $w = w_3 + w_4 + w_5 + \ldots$, $2k = 3s_3 + 4s_4 + 5s_5 + \ldots$ oraz $2k = 3w_3 + 4w_4 + 5w_5 + \ldots$

Stąd

$$\begin{aligned} w_3 + s_3 &\geqslant w_3 + s_3 + 3w_3 + 4(w_4 + w_5 + \ldots) - 2k + \\ &\quad + 3s_3 + 4(s_4 + s_5 + \ldots) - 2k = \\ &= 4(w_3 + w_4 + w_5 + \ldots) - 4k + 4(s_3 + s_4 + s_5 + \ldots) = \\ &= 4(w - k + s) = 8. \end{aligned}$$

R9. Jeśli wielościan ma p ścian pięciokątnych i q sześciokątnych, to $s = p + q$ oraz $2k = 5p + 6q$. Wielokąty są foremne, zatem w każdym wierzchołku schodzą się po trzy. Stąd $2k = 3w$, czyli $3w = 5p + 6q$, a więc

$$2 = w - k + s = \frac{5p + 6q}{3} - \frac{5p + 6q}{2} + p + q = \frac{1}{6} \cdot (10p + 12q - 15p - 18q + 6p + 6q) = \frac{p}{6}.$$

Zatem $p = 12$ – wielościan ma 12 ścian pięciokątnych.

Pozostawiamy Czytelnikom uzasadnienie, że krawiec może uszyć tylko dwunastościany foremne i piłki nożne. □

R10. Szukamy wielościanów wypukłych zbudowanych z n-kątów foremnych, po p w każdym wierzchołku. Oznacza to, że $2k = ns$ oraz $2k = pw$. Wobec tego

$$2 = w - k + s = \frac{2k}{p} - k + \frac{2k}{n}, \quad \text{czyli} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{k} = \frac{1}{p} + \frac{1}{n},$$

przy czym $n, p \geqslant 3$. Równanie to ma pięć rozwiązań.

Skądinąd znamy pięć wielościanów foremnych: dla $(n, p) = (3, 3)$ czworościan, $(4, 3)$ – sześcian, $(3, 4)$ – ośmiościan, $(5, 3)$ – dwunastościan i $(3, 5)$ – dwudziestościan. Powyższe rozumowanie wskazuje, że więcej ich być nie może. □

Zadania domowe

11. Czy istnieje wielościan wypukły o czworokątnych ścianach i o 25 krawędziach?

12. Wykaż, że każdy wielościan wypukły ma wierzchołek o mniej niż 6 krawędziach oraz ścianę o mniej niż 6 bokach.

Zadanie 3 pochodzi z XLIX Olimpiady Matematycznej, a zadanie 6 z Ligi Zadaniowej Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów.