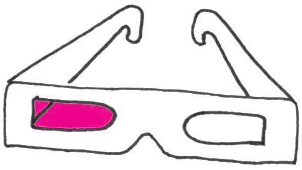
Rzut butem, czyli twierdzenie Chaslesa

Marek KORDOS



Niedawno podczas rozmowy z kolegami – młodymi matematykami i fizykami – zorientowałem się, że dla nich informacja o tym, jak wyglądają wszystkie możliwe ruchy obiektu materialnego w trójwymiarowej przestrzeni, jest zaskakująca. Chodzi o następujący obrazowy opis.

Zdjąłem z nogi but i cisnąłem nim byle jak, po czym on upadł byle gdzie i jakoś tam leży. Istnieje ruch po linii śrubowej, za pomocą którego można kulturalnie przenieść ten but z obecnego położenia na moją nogę.

Wyrażając się żargonowo (czyli fachowo), można powyższą anegdotę wyrazić zdaniem

każda niezmieniająca orientacji izometria przestrzeni trójwymiarowej jest ruchem śrubowym, czyli złożeniem obrotu z przesunięciem równoległym do jego osi.

Jest to fragment twierdzenia Michela Chaslesa (czyt. Szala), w którym sklasyfikował on wszelkie izometrie (czyli przekształcenia niezmieniające odległości) na płaszczyźnie i w przestrzeni.

Słowo „orientacja” użyte wyżej tłumaczy, dlaczego w anegdotce rzucałem butem – żaden rzut nie zmieni buta prawego na lewy ani lewego na prawy.

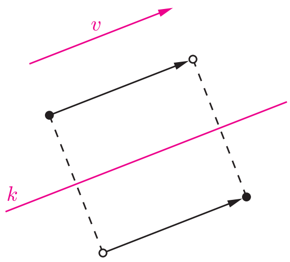
Zamiast ubolewać nad nieświadomością młodego pokolenia, przyjrzyjmy się temu twierdzeniu.

Oto pełne brzmienie twierdzenia Chaslesa dla płaszczyzny.

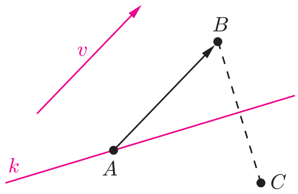
Każda izometria płaszczyzny jest przesunięciem, obrotem lub symetrią z poślizgiem (czyli złożeniem symetrii osiowej z przesunięciem równoległym do jej osi). *Orientację zachowują pierwsze dwa z tych przekształceń.*

Dla przestrzeni wygląda ono tak.

Każda izometria przestrzeni to ruch śrubowy, symetria z poślizgiem (czyli złożenie symetrii płaszczyznowej z przesunięciem o wektor równoległy do tej płaszczyzny) *lub symetria obrotowa* (czyli złożenie symetrii płaszczyznowej z obrotem względem prostej prostopadłej do tej płaszczyzny).

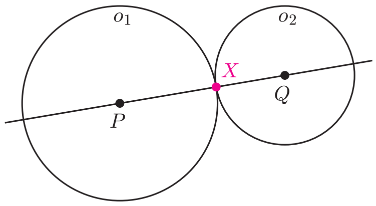


Rys. 1. Gdy $v \parallel k$, kolejność wykonywania przesunięcia i symetrii jest dowolna.



Rys. 2. Gdy $v \nparallel k$, obrazem punktu A w przesunięciu i symetrii będzie punkt C, a w symetrii i przesunięciu punkt B.

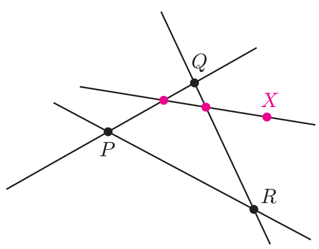
W obu tych twierdzeniach, obok przesunięć i obrotów, występują raczej egzotyczne dla ogółu nazwy – czemu Chasles zwrócił uwagę akurat na takie przekształcenia? Odpowiedź jest zaskakująco prosta: w każdym z nich kolejność wykonywania ich składowych przekształceń nie ma wpływu na wynik, czyli ich składanie jest przemienne. Obojętne jest, czy mając w przestrzeni obrót względem prostej i przesunięcie o wektor równoległy do tej prostej, najpierw wykonamy obrót, a potem przesunięcie, czy też najpierw przesunięcie, a potem obrót. Podobnie jest w pozostałych przypadkach. Jeszcze ciekawsze jest to, że składanie przesunięć, obrotów i symetrii przemienne jest tylko w wymienionych w twierdzeniach Chaslesa przypadkach. Łatwo objaśnić to na obrazkach – w przypadku symetrii z poślizgiem na płaszczyźnie demonstrują to rysunki 1 i 2.



Rys. 3. Jeśli P jest punktem stałym, obraz X pozostaje na o_1. Gdy również Q jest punktem stałym, obraz X pozostaje na o_2, a zatem nie rusza się.

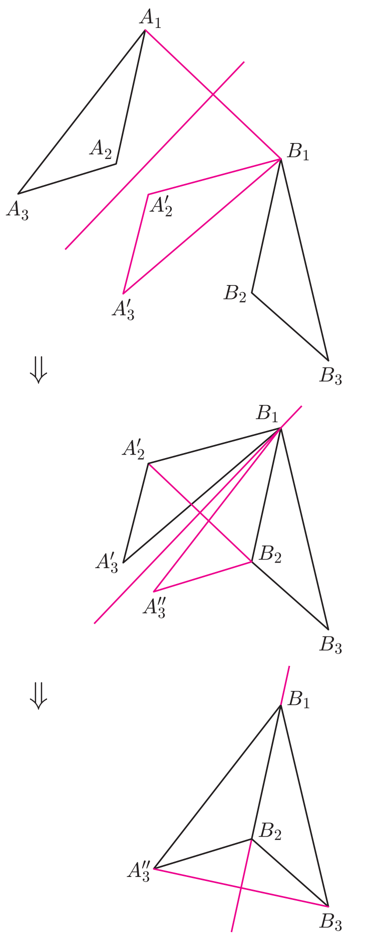
Droga do dowodu twierdzenia Chaslesa wiedzie przez wykazanie, że każdą izometrię można uzyskać przez złożenie symetrii osiowych w przypadku płaszczyzny czy płaszczyznowych w przypadku przestrzeni.

W tym celu przyjrzyjmy się punktom stałym izometrii. Gdy izometria ma punkt stały P, to zachowuje ona okręgi o środku w P w przypadku płaszczyzny i sfery o środku w P w przypadku przestrzeni. Gdy stały jest jeszcze inny punkt Q, to w obu przypadkach wszystkie punkty prostej PQ są stałe (rys. 3). Gdy na dodatek stały jest jeszcze pewien punkt R nieleżący na tej prostej, to stałe są wszystkie punkty płaszczyzny PQR (rys. 4).



Rys. 4. Jeśli P, Q, R są punktami stałymi, stałe są wszystkie punkty prostych PQ, QR, RP. Zatem prosta przechodząca przez X i przecinająca dwie z tych prostych ma dwa punkty stałe, stąd stałe są wszystkie jej punkty, a więc i X.

Gdy mamy do czynienia z przestrzenią, są jeszcze punkty poza tą płaszczyzną – Czytelnik Sprawny w mgnieniu oka przystosuje rozumowanie z rysunku 4



Rys. 5

do wykazania, że gdy istnieje wśród nich punkt stały, to stałe są wszystkie punkty przestrzeni. Zatem

Jeśli izometria ma trzy niewspółliniowe punkty stałe na płaszczyźnie (cztery niewspółpłaszczyznowe punkty stałe w przestrzeni), to jest identycznością,

nazywa się to małym twierdzeniem o sztywności. Ale jest i duże.

Jeśli dwie izometrie pokrywają się na trzech niewspółliniowych punktach płaszczyzny (czterech niewspółpłaszczyznowych punktach przestrzeni), to są jednakowe.

Istotnie, jeśli te izometrie to φ i ψ, to izometria $\psi^{-1}\varphi$ jest w myśl małego twierdzenia o sztywności identycznością, mamy więc

$$\psi^{-1}\varphi = \mathrm{id}, \quad \text{zatem} \quad \psi\psi^{-1}\varphi = \psi, \quad \text{czyli} \quad \varphi = \psi.$$

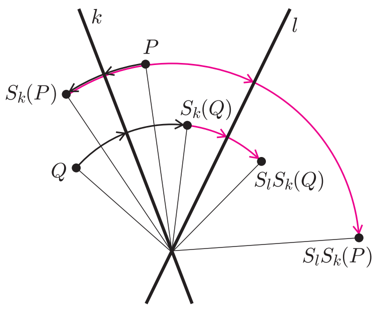
Kolejny krok to twierdzenie o rozkładzie.

Każda izometria może być przedstawiona jako złożenie co najwyżej trzech symetrii osiowych w przypadku płaszczyzny (czterech symetrii płaszczyznowych w przypadku przestrzeni).

Oto recepta na ich znalezienie. Zajmijmy się płaszczyzną. W myśl twierdzenia o sztywności wystarczy pokazać złożenie trzech symetrii, które nałoży dane dwa trójkąty przystające, nazwijmy je $A_1A_2A_3$ i $B_1B_2B_3$. Przepis jest następujący.

Jeśli $A_1 \neq B_1$, wykonaj symetrię trójkąta $A_1A_2A_3$ względem symetralnej odcinka A_1B_1; otrzymasz trójkąt $B_1A'_2A'_3$.
Jeśli teraz $A'_2 \neq B_2$, wykonaj symetrię trójkąta $B_1A'_2A'_3$ względem symetralnej odcinka A'_2B_2; otrzymasz trójkąt $B_1B_2A''_3$.
Jeśli jeszcze $A''_3 \neq B_3$, wykonaj symetrię trójkąta $B_1B_2A''_3$ względem symetralnej odcinka A''_3B_3.
(Czytelnik Zinformatyzowany oczywiście w mgnieniu oka zamieni ten przepis na króciutki pseudokod.)

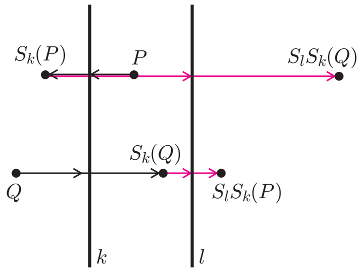
Działanie tego przepisu w przypadku, gdy aż trzy razy trzeba zastosować symetrię, przedstawia rysunek 5. To, nad czym trzeba chwilę się zastanowić, to fakt, że kolejna symetria nie „rozkleja" już nałożonych punktów – gwarantuje to założone przystawanie trójkątów.



Rys. 6

Każdy Czytelnik, który doczytał do tego miejsca, bez trudu poradzi sobie z podaniem analogicznego przepisu dla przestrzeni (przypominam, że symetralna odcinka w przestrzeni jest płaszczyzną).

Warto zwrócić uwagę na bezpośrednie wnioski z twierdzeń o sztywności, jakie w szczególnych przypadkach wzmacniają twierdzenie o rozkładzie. Jeśli np. izometria płaszczyzny ma punkt stały, to zawsze da się rozłożyć na co najwyżej dwie symetrie, a gdy ma dwa punkty stałe, to jest symetrią lub identycznością. Podobnie jest w przypadku izometrii przestrzeni – gdy wiemy, że są punkty stałe, liczba niezbędnych symetrii do jej uzyskania zmniejsza się.



Rys. 7

Przypomnijmy teraz sobie (bo przecież wszyscy to wiedzą lub wiedzieli), że złożenie dwóch symetrii względem przecinających się prostych na płaszczyźnie (płaszczyzn w przestrzeni) to obrót o kąt dwukrotnie większy niż między nimi (rys. 6). Podobnie, złożenie dwóch symetrii względem prostych równoległych na płaszczyźnie (płaszczyzn równoległych w przestrzeni) jest przesunięciem o wektor dwukrotnie większy niż między nimi (rys. 7).

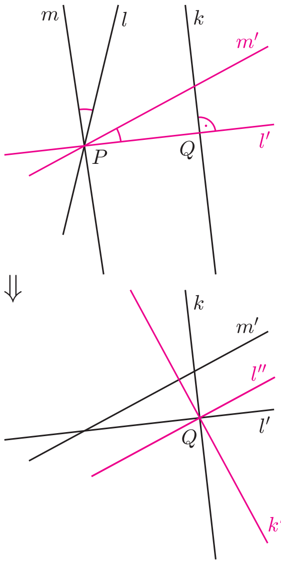
Pozwala to na stwierdzenie, że złożenie symetrii względem trzech prostych na płaszczyźnie jest zawsze symetrią z poślizgiem. Rozpatrzmy przypadek szczególny: składamy symetrie względem prostych k, l, m, przy czym l i m mają punkt wspólny P, przez który prosta k nie przechodzi. Wtedy zastępujemy proste l i m tworzącymi ten sam kąt prostymi l' i m' przechodzącymi przez P, przy czym l' jest prostopadła do k. Jeśli chodzi o przekształcenie, to nic się nie zmieniło, bo $S_{m'}S_{l'}$ jest tym samym obrotem co S_mS_l, a więc

$$S_mS_lS_k = S_{m'}S_{l'}S_k.$$

Oznaczmy punkt przecięcia prostopadłych prostych k i l' przez Q. Teraz zastąpimy te proste przez inne przechodzące przez Q proste prostopadłe k' i l'', takie, że k' jest prostopadła do m'. I znów mamy (rys. 8)

$$S_m S_l S_k = S_{m'} S_{l'} S_k = S_{m'} S_{l''} S_{k'},$$

czyli nasze przekształcenie okazało się złożeniem symetrii względem k' i przesunięciem o podwojony wektor łączący prostopadle l'' i m', czyli symetrią z poślizgiem.



Rys. 8

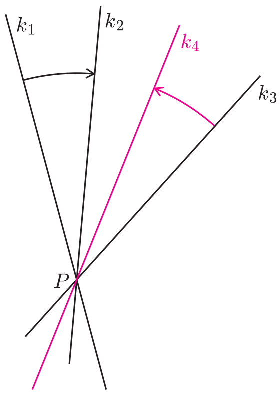
Czytelnik Nieufny może teraz powtórzyć podobne operacje w innych możliwych przypadkach położenia trzech prostych na płaszczyźnie. No i oczywiście natknie się na sytuacje, w których jest to niemożliwe – mianowicie wtedy, gdy trzy osie symetrii mają wspólny kierunek albo też wspólny punkt. Na szczęście sytuację tę reguluje twierdzenie o redukcji.

Na płaszczyźnie złożenie symetrii względem trzech prostych mających wspólny punkt (lub kierunek) można zastąpić jedną symetrią względem prostej również przechodzącą przez ten punkt (mającą ten kierunek).
W przestrzeni złożenie symetrii względem trzech płaszczyzn mających wspólną prostą (lub parami równoległych) można zastąpić jedną symetrią względem płaszczyzny również przechodzącej przez tę prostą (równoległą do nich).

Weźmy bowiem pod uwagę trzy proste k_1, k_2, k_3 na płaszczyźnie (płaszczyzny π_1, π_2, π_3 w przestrzeni) mające wspólny punkt P (wspólną prostą p). Jeśli kąt od k_1 do k_2 jest równy α, to zastępującą je prostą (płaszczyzną) jest taka prosta k_4 (płaszczyzna π_4) przechodząca przez P (p), że kąt od k_3 do k_4 (od π_3 do π_4) jest równy $-\alpha$ (rys. 9). Wówczas $S_{k_4} S_{k_3} S_{k_2} S_{k_1}$ jest obrotem o kąt $\alpha + (-\alpha) = 0$, czyli jest identycznością. A więc mamy

$$S_{k_4} S_{k_3} S_{k_2} S_{k_1} = \mathrm{id}, \quad \text{zatem} \quad S_{k_4} S_{k_4} S_{k_3} S_{k_2} S_{k_1} = S_{k_4}, \quad \text{czyli} \quad S_{k_3} S_{k_2} S_{k_1} = S_{k_4}$$

i tak samo będzie dla płaszczyzn.



Rys. 9

Zupełnie analogicznie postępujemy w przypadku, gdy proste (płaszczyzny) są równoległe: gdy wektor łączący prostopadle k_1 i k_2 (czy π_1 i π_2) to v, jako k_4 bierzemy taką prostą (płaszczyznę π_4) równoległą do danych, którą z k_3 (z π_3) łączy wektor $-v$.

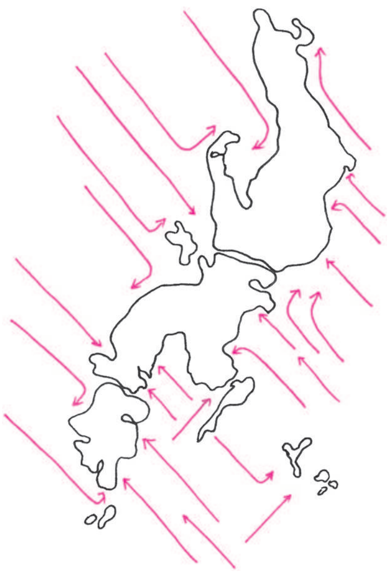
A więc w przypadku płaszczyzny ze złożenia trzech symetrii otrzymujemy zawsze symetrię z poślizgiem – być może zerowym.

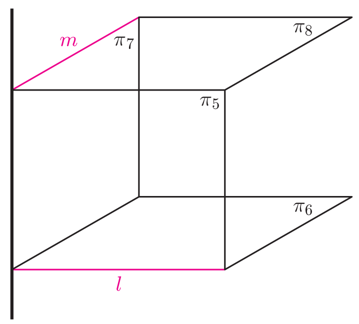
Gdy chcemy stwierdzić jednak, jak wyglądają izometrie powstałe ze złożenia symetrii względem trzech płaszczyzn niespełniających założeń twierdzenia o redukcji, sytuacja nie jest już tak bezproblemowa.

Jak wiadomo (czy na pewno wiadomo?), dowolne trzy płaszczyzny mają wspólny punkt lub wspólną płaszczyznę prostopadłą.

Ten drugi przypadek jest powtórzeniem sytuacji z płaszczyzny (tak, jak byśmy patrzyli prostopadle do tej wspólnej prostopadłej). Tak więc symetrie z poślizgiem w przestrzeni mamy załatwione.

Pozostaje zbadać, co się dzieje, gdy składamy trzy symetrie względem płaszczyzn mających punkt wspólny O – nazwijmy wynik tego złożenia χ. Dogodnym chwytem jest tu złożenie χ z symetrią względem O, oznaczmy ją ω. Symetria względem punktu w przestrzeni to złożenie trzech symetrii płaszczyznowych względem płaszczyzn prostopadłych (w układzie współrzędnych byłoby to $(x, y, z) \to (-x, -y, -z)$). Otrzymujemy zatem złożenie sześciu symetrii płaszczyznowych, co wobec uwag po twierdzeniu o rozkładzie (jest punkt stały!) oznacza, iż jest to obrót względem jakiejś prostej przez O – oznaczmy ją t, a sam obrót przez τ (istotnie, złożenie sześciu symetrii da się przedstawić jako złożenie czterech, a punkt stały zmniejsza to do trzech; z kolei fakt, że sześć symetrii płaszczyznowych nie zmienia orientacji, zmniejsza trzy do dwóch). Mamy więc $\omega\chi = \tau$, a więc $\chi = \omega^{-1}\tau = \omega\tau$, gdyż symetria względem punktu jest (jak wszystkie symetrie) inwolucją, czyli jest odwrotna sama do siebie.





Rys. 10

Trzy symetrie składające się na ω możemy dobrać tak, by dwie z nich były symetriami względem dowolnych płaszczyzn prostopadłych przechodzących przez t – trzecia wobec tego będzie do t prostopadła. Korzystając z tych oznaczeń, mamy dwa obroty względem t: jeden z nich to τ, a drugi to symetria o osi t – czyli w sumie jeden obrót o kąt sumaryczny – oraz symetrię względem płaszczyzny prostopadłej do t. Zatem χ rzeczywiście jest symetrią obrotową.

I w ten sposób pozostało nam już tylko rozpatrzenie sytuacji, gdy izometria przestrzeni jest złożeniem czterech symetrii płaszczyznowych i nie ma punktów stałych.

W tym celu weźmy pod uwagę jakąś izometrię φ niezmieniającą orientacji i niech ona przeprowadza pewien punkt A na $A' \neq A$. Oznaczmy przez π_4 symetralną AA'. Przekształcenie $S_{\pi_4}\varphi$ zmienia orientację i ma punkt stały (mianowicie A) – jest zatem symetrią obrotową. Mamy więc $S_{\pi_4}\varphi = \rho S_{\pi_1}$, gdzie ρ jest obrotem (oznaczmy jego oś przez k), przy czym $k \perp \pi_1$. Przedstawmy ρ jako złożenie symetrii względem zawierających k płaszczyzn π_2 i π_3 – jest tu (jak zawsze przy obrotach) duża dowolność – niech więc π_3 będzie prostopadła do π_4 (oczywiście $\pi_2 \perp \pi_1 \perp \pi_3$).

Mamy więc $S_{\pi_4}\varphi = S_{\pi_3}S_{\pi_2}S_{\pi_1}$, czyli $\varphi = S_{\pi_4}S_{\pi_3}S_{\pi_2}S_{\pi_1} = (S_{\pi_4}S_{\pi_3})(S_{\pi_2}S_{\pi_1})$; są to – wobec $\pi_1 \perp \pi_2$ i $\pi_3 \perp \pi_4$ – dwie symetrie osiowe. Oznaczmy ich osie przez l i m. Zatem $\varphi = S_m S_l$. Proste k i l są skośne – gdyby były równoległe, φ byłoby przesunięciem, a więc złożeniem dwóch symetrii płaszczyznowych, gdyby zaś się przecinały, istniałby punkt stały.

Dowolne dwie proste skośne leżą w pewnych płaszczyznach równoległych – przedstawmy więc symetrie względem l i m w następujący sposób (patrz rys. 10):

$$S_l = S_{\pi_6}S_{\pi_5}, \quad S_m = S_{\pi_8}S_{\pi_7} \quad \text{i} \quad \pi_6 \parallel \pi_8.$$

Zauważmy, że wtedy również płaszczyzny π_6 i π_7 są prostopadłe, zatem

$$\varphi = S_{\pi_8}S_{\pi_7}S_{\pi_6}S_{\pi_5} = S_{\pi_8}S_{\pi_6}S_{\pi_7}S_{\pi_5} = (S_{\pi_8}S_{\pi_6})(S_{\pi_7}S_{\pi_5}) = \tau\vartheta,$$

gdzie ϑ to obrót o osi $\pi_5 \cap \pi_7$, a τ to przesunięcie wzdłuż tej osi.

Twierdzenie Chaslesa dla przestrzeni zostało tym samym udowodnione.

Warto wiedzieć, że Chasles udowodnił również twierdzenia klasyfikujące podobieństwa na płaszczyźnie i w przestrzeni. Ale może o tym innym razem...

Czekanie na renesans

Współczesna fizyka teoretyczna przypomina trochę archipelag wysp poddany działaniu żywiołów, wynoszony w górę ruchami tektonicznymi, ale równocześnie niszczony bezlitosnym smaganiem fal. Części wewnętrzne wysp, niosące praktycznie całokształt kultury materialnej tego lądu, nie doznają przy tym żadnego uszczerbku, można wręcz rzec, że systematycznie się powiększają. Co innego z nabrzeżem, które stale się zmienia i to w dość nieprzewidywalny sposób. Tu wynurzy się przesmyk między dwiema wysepkami, gdzie indziej zaś podmyty klif malowniczo pogrąży się w odmętach. Przypadkowy turysta, mający natychmiastowy dostęp do wszelkiego rodzaju informacji i, paradoksalnie, przez to coraz bardziej nieprzygotowany do poznawania obcych krain, może łatwo przedłożyć wrażenia dostarczane przez surowe piękno przybrzeżnej kipieli nad żmudne przedzieranie się przez zawiłości ornamentyki miejscowych świątyń, zwłaszcza gdy do każdego rodzaju rozrywek może bez trudu wynająć kompetentnego przewodnika.

Fizycy zajmujący się popularyzacją stają nierzadko przed dylematem, czy lepiej edukować współobywateli, dostarczając im solidnej porcji ugruntowanej wiedzy, czy też zaciekawiać ich, ukazując burzliwe dyskusje toczące się na froncie badań, gdzie nauka znajduje się *in statu nascendi*, a ugruntowana wiedza wyłoni się dopiero z piany idei śmiałych i szalonych. Właśnie tę drugą drogę obrał w swej najnowszej tłumaczonej na język polski książce Lee Smolin.

Autor rozpoczyna swe rozważania od stwierdzenia, że wszystkie wielkie teorie fizyczne – mechanika klasyczna, mechanika kwantowa czy ogólna teoria względności – opisują deterministyczną ewolucję układów fizycznych. Skoro zaś cała przyszłość określona jest przez teraźniejszość, a ta z kolei przez przeszłość, to czy istnieje we wszechświecie jakaś fizycznie istotna zmienność niebędąca tylko złudą wynikającą z ludzkiego sposobu doświadczania rzeczywistości? A w szczególnym przypadku wszechświata jako całości – czy wartości opisujących go parametrów są wynikiem jakiejś deterministycznej „decyzji"? Dalej zaś skrzy się szaleństwo i śmiałość pomysłów przywoływanych przez Smolina, niestety, bez oczywistego kryterium wyboru. Pomysłów, którym – w przeciwieństwie do innych, konkurencyjnych koncepcji – często nie udało się zainteresować wielu badaczy, czy wręcz otworzyć nowe pola badań. Stan ten niezbyt mnie dziwi, bowiem przy lekturze wcale obszernych fragmentów książki nie byłem się w stanie zgodzić z niczym, co miałem przed oczami, może poza kolejnością numeracji stron. Była to jednak niezgoda radosna i inspirująca, książka Smolina jest bowiem świetnie napisana, bogata w informacje, wciągająca i stymulująca – to bynajmniej nie książka popularno-naukowa, raczej pełen żaru osobisty manifest. Czytać? Warto. Wierzyć Smolinowi, że tak właśnie wygląda fizyka? Na własną odpowiedzialność.

K. T.

Lee Smolin, *Czas odrodzony. Od kryzysu w fizyce do przyszłości wszechświata*, Prószyński Media, Warszawa 2015.