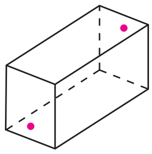
Panaceum?

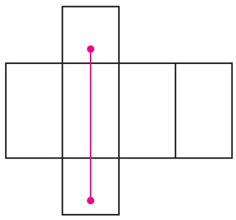
Joanna JASZUŃSKA

W rozwiązaniach wielu zadań kluczowe jest rozłożenie danej bryły tak, by uzyskać jej siatkę. Jeśli z kolei chcemy zbudować model wielościanu, często rysujemy jego siatkę, wycinamy, składamy... Siatki to przydatne narzędzie, jednakże – jak to z narzędziami bywa – trzeba ostrożnie się nimi posługiwać. Proszę ocenić poprawność poniższych trzech stwierdzeń.

1. Pokój ma kształt prostopadłościanu o wymiarach 3 m × 3 m × 5 m (rys. 1a). Nad środkiem jednej z krótszych krawędzi podłogi, na wysokości 10 cm, siedzi pająk. Chce on dotrzeć do punktu położonego 10 cm pod przeciwległą krawędzią sufitu. Najkrótszą drogę, o długości 8 m, oznaczono kolorowym odcinkiem na siatce przedstawionej na rysunku 1b.

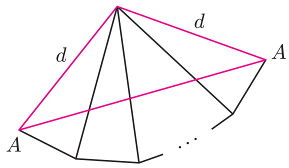


Rys. 1a

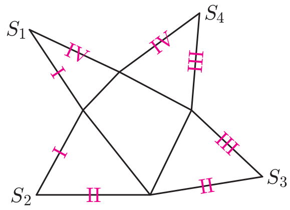


Rys. 1b

2. Dany jest ostrosłup prawidłowy o krawędzi bocznej długości d. W wierzchołku A podstawy siedzi pająk. Chce on przejść po powierzchni bocznej, odwiedzając wszystkie krawędzie boczne (być może w ich końcach) i wrócić do punktu wyjścia. Z rysunku 2 i z nierówności trójkąta wynika, że istnieje droga krótsza niż $2d$.



Rys. 2

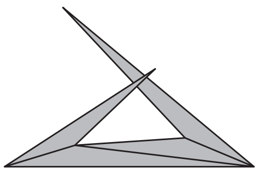


Rys. 3

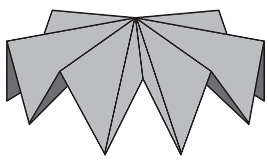
3. Rysunek 3 przedstawia siatkę ostrosłupa.

To nie koniec kłopotów z siatkami. Jeśli model wielościanu rozcinamy wzdłuż pewnych krawędzi, by uzyskać jego siatkę, może nas spotkać niespodzianka przedstawiona na rysunku 4 – siatka nachodzi sama na siebie! Nie da się jej narysować na kartce, wyciąć i złożyć. Ale łatwo ją poprawić: odciąć lewą ścianę i przykleić wzdłuż którejś z jej pozostałych krawędzi.

Czy zawsze, gdy otrzymamy siatkę, która sama na siebie nachodzi, istnieje inna siatka, pozbawiona tej wady?



Rys. 4. Siatka czworościanu.



Rys. 5

Rysunek 5 przedstawia powierzchnię z brzegiem. Rozcięcie jednej krawędzi pozwala ją „rozpłaszczyć", ale nachodzi wtedy sama na siebie, gdyż suma kątów płaskich przy jej centralnym wierzchołku przekracza 360°. Rozcięcie drugiej krawędzi sprawia, że powierzchnia rozpada się na dwie części. Nie istnieje więc żadna jej siatka, która nie nachodziłaby sama na siebie.

Istnieją również wielościany o tej własności. Wszystkie znane przykłady są wklęsłe. Nie wiadomo, czy istnieje taki wielościan wypukły – problem ten, zwany *hipotezą Shepharda*, jest (o ile wiem) otwarty.

Wklęsłe wielościany bez „dobrych" siatek opisano np. na stronie `http://erikdemaine.org/papers/Ununfoldable/paper.pdf`, z której pochodzi też rys. 5.

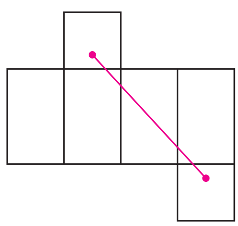
Rys. 4 oraz drugi tego typu przykład przedstawiono na stronie `http://mathworld.wolfram.com/Unfolding.html`.

Rozwiązania

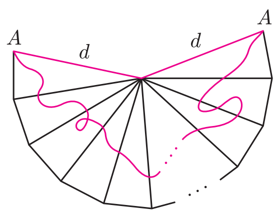
R1. Rysunek 6 przedstawia krótszą drogę, co łatwo sprawdzić, korzystając z twierdzenia Pitagorasa. ☐

R2. W przypadku przedstawionym na rysunku 7 każda z możliwych dróg ma długość co najmniej $2d$. ☐

R3. Można skserować, wyciąć, spróbować złożyć „siatkę" i zobaczyć, że S_1 z S_2 sklejają się w innym punkcie, niż S_3 z S_4. Wynika to z faktu, że na rysunku 3 wysokości trójkątów, poprowadzone z wierzchołków S_1, S_2, S_3, S_4, nie przecinają się w jednym punkcie – spodku wysokości ostrosłupa – a powinny. ☐



Rys. 6. $\sqrt{(5{,}2)^2+6^2}<8$.



Rys. 7

Zadanie 1 jest modyfikacją przykładu z książki K. Ciesielskiego *102 zadania dla małych, średnich i dużych sympatyków matematyki.* Siatkom i dziwnym „rozpłaszczeniom" poświęcony był także *deltoid* 8/2014.