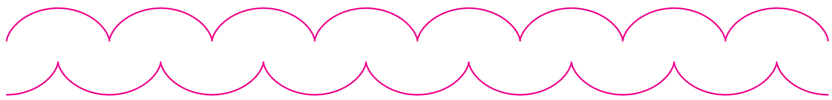
mała delta

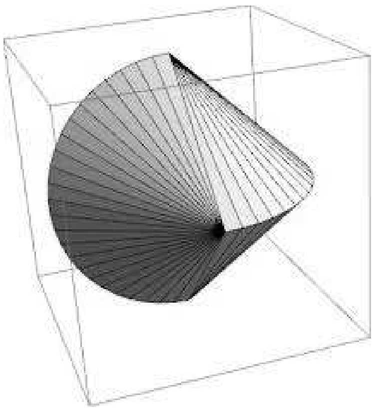
Sferostożki i inne cudaki

Bryła to stworzenie, z którym większość z nas poznała się w szkole podstawowej i które było przez nas oswajane przez kolejne lata edukacji. Znamy bliżej różne rodziny brył, takie jak wielościany, graniastosłupy, bryły obrotowe, foremne, platońskie. Oczywiście, można produkować nowe stworzenia, łącząc czy tnąc „podstawowe” gatunki, a jedynym ograniczeniem jest nasza wyobraźnia.

Oto kolejna rodzina ciekawych stworzeń, odkryta stosunkowo niedawno (jak na odkrycia z dziedziny stereometrii), bo przed pięćdziesięciu laty...

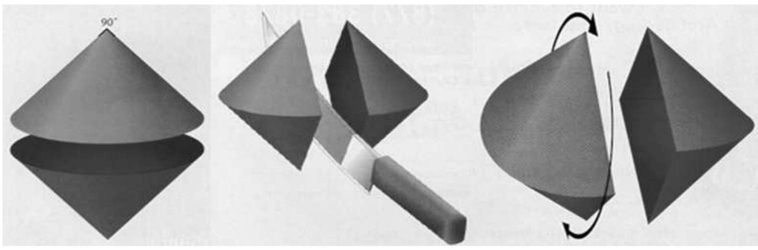
Sferostożek (ang. *sphericon*), bo o tej rodzinie mowa, to bryła, która tocząc się po pochylonej płaszczyźnie, dotyka jej każdym punktem znajdującym się na jej powierzchni i zostawia taki ślad





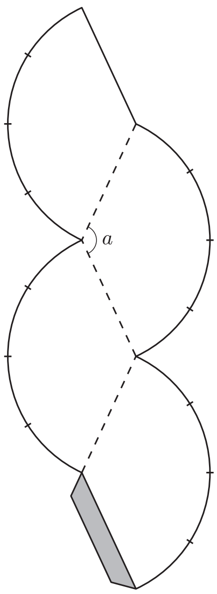
Powierzchnie, które tocząc się po płaszczyźnie, każdym punktem dotykają tej płaszczyzny, nazywamy *rozwijalnymi* (ang. *developable surface*). Innymi słowy są to zakrzywione powierzchnie, które możemy złożyć z płaskiej kartki papieru. Taka jest np. boczna powierzchnia walca czy stożka, a nie jest taka np. powierzchnia kuli czy siodła.

Opis ten jest wystarczający do jednoznacznego zdefiniowania sferostożka, jednak wyobrażenie sobie na tej podstawie jego kształtu nie jest rzeczą prostą. Zdecydowanie łatwiej „zobaczyć” go, śledząc poniższą instrukcję:



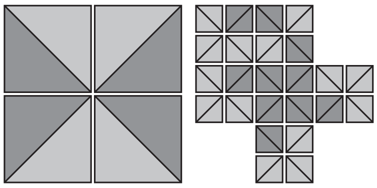
Utwórz bryłę obrotową poprzez obrót kwadratu wokół jego przekątnej (inaczej: połącz podstawami dwa identyczne stożki, których wysokość jest równa promieniowi podstawy). Następnie bryłę tę przetnij na pół wzdłuż przekroju osiowego (który jest kwadratem), jedną z powstałych połówek obróć o 90° i sklej.

Aby wykonać papierowy model powierzchni tej bryły, wystarczy skleić siatkę znajdującą się na marginesie.

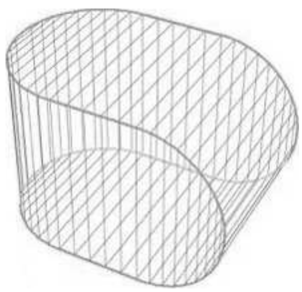


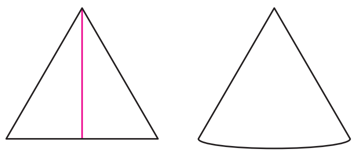
Zanim narysujesz swoją siatkę sferostożka, wyznacz miarę kąta a. Bez składania modelu policz liczbę jego krawędzi oraz wierzchołków.

Historia sferostożka rozpoczęła się w Baldock w Anglii. Uczeń stolarza, Colin J. Roberts, miłośnik matematyki, szukał bryły, która byłaby odpowiednikiem wstęgi Möbiusa. Zwrócił uwagę, że wstęga Möbiusa – długi prostokątny pasek papieru, którego końce sklejamy w „obręcz”, przekręcając uprzednio jeden z brzegów o 180° – ma tę własność, że rysując linię wzdłuż środka wstęgi, otrzymamy zamkniętą pętlę, która znajdzie się z jednej i drugiej strony wstęgi (a właściwie tylko z jednej, bo – jak każdy wie – drugiej strony nie ma). Naśladując tę własność, odkrył sferostożek – nic dziwnego, że drewniany. Rysując linię wzdłuż środka powierzchni jego ściany (tak, sferostożek ma tylko jedną ścianę – każde dwa punkty można połączyć linią nieprzecinającą krawędzi), otrzymamy zamkniętą pętlę. Na dodatek, jeżeli w sferostożek wpiszemy kulę, to miejsca styku kuli i sferostożka utworzą zamkniętą pętlę. Stolarskie odkrycie przez trzydzieści lat niewiele wyszło poza warsztat: drewniany model otrzymała młodsza siostra Robertsa i sferostożek został zapomniany, aż do roku 1999. Wtedy to odkrywca, czytając rubrykę *Mathematical*

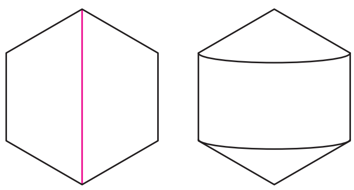


Ustawienie sferostożków obracających się dookoła siebie. W sześciu grupach sferostożków (po cztery każda) kolorem ciemnoszarym zaznaczono te sferostożki, które obracają się dookoła bryły z sąsiadującej grupy.

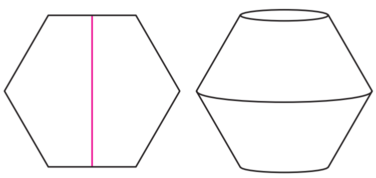




Nieparzysty 3-sferostożek



Parzysty 6-sferostożek



Dualny 6-sferostożek

Recreation w *Scientific American*, przypomniał sobie o swoim sferostożku. Napisał do Iana Stewarta, wieloletniego autora rubryki, który obwieścił światu istnienie tego zwierzaka.

Serdecznie zachęcamy wszystkich, którzy skleją papierową siatkę tej bryły, do toczenia otrzymanego modelu, gdyż jest to rzecz niezwykle przyjemna dla oka (o czym przekonał się zespół Iana Stewarta, który – otrzymawszy od Robertsa pudło pełne sferostożków – przez parę godzin nie mógł oderwać się od ich toczenia).

Niezwykle efektownie prezentują się cztery sferostożki, które umieszczone w sposób opisany na marginesie, będą obracać się dookoła siebie wzajemnie. Ustawiając sześć grup, każda po cztery sferostożki, w taki sposób jak na rysunku z prawej, otrzymamy jeszcze ciekawsze obroty (do wykonania doświadczenia potrzebnych będzie wiele rąk do pomocy). W każdej grupie cztery sferostożki obracają się dookoła siebie, dodatkowo sześć grup obraca się w taki sposób, że po całkowitym obrocie otrzymamy konstrukcję mającą wiele wspólnego z ośmiościanem.

Wróćmy do instrukcji wykonania sferostożka. Gdyby tak zmienić pierwszy krok i kwadrat obrócić nie wokół przekątnej, lecz wzdłuż osi symetrii przechodzącej przez środki boków kwadratu, powstałby oczywiście walec. Resztę kroków zostawmy bez zmian, a wtedy otrzymamy kolejnego stwora – sferowalec (ang. *squircle*). Bryła mająca dwie ściany, zero wierzchołków i jedną krawędź.

Sferostożek i sferowalec to tylko dwójka reprezentantów całkiem pokaźnej rodziny sferostożków. Żeby utworzyć resztę jej reprezentantów, w pierwszym kroku instrukcji obracamy inne wielokąty foremne niż kwadrat. Rozpatruje się trzy rodzaje brył w tej rodzinie. *Nieparzysty n-sferostożek* to bryła powstała według wcześniejszej instrukcji, gdzie w pierwszym kroku dana jest figura foremna o nieparzystej liczbie kątów. *Parzysty n-sferostożek* powstaje z obrotu figury foremnej o parzystej liczbie kątów względem osi symetrii przechodzącej przez wierzchołki figury, a *dualny n-sferostożek* – z obrotu tejże figury względem osi symetrii przechodzącej przez środki przeciwległych boków.

Wybór figury foremnej i osi symetrii nie zawsze determinuje jednoznacznie końcowy efekt. Również wybór kąta, o jaki będziemy obracać jedną z połówek bryły, może mieć wpływ na wynik.

Niech k będzie liczbą obrótów połowy bryły o taki najmniejszy możliwy kąt $0 < \alpha \leqslant 180°$, że po jego obrocie wierzchołki obu połówek bryły „spotkają się". Dla n-kąta foremnego $k = 1$ oznacza obrót prawej połowy o $\alpha = 360°/n$ w kierunku zgodnym z ruchem zegara, $k = 2$ oznacza obrót o 2α itd. W przypadku parzystego 6-sferostożka, dla $k = 1$ otrzymamy inną orientację niż dla $k = 2$. „Ślady" pozostawione przez te toczące się bryły będą wzajemnie lustrzanymi odbiciami. Podobnie dla innych n możemy uzyskać różne wariacje o wiele ciekawsze niż tylko prawo i lewoskrętność. Zachęcamy do zgłębienia tego tematu.

W przypadku sferostożka i sferowalca jedynym „ciekawym" kątem obrotu jest 90°.

Znana jest ogólna zasada na wyznaczenie liczby ścian oraz krawędzi brył z rodziny sferostożków w zależności od n i k, gdzie $x = \mathrm{NWD}(n, k)$, $y = \mathrm{NWD}(n/2, k)$.

	parzysty n-sferostożek	dualny n-sferostożek	nieparzysty n-sferostożek
liczba ścian	$(x+1)/2$	$y+1$	y
liczba krawędzi	$(x+1)/2$	y	$y+1$

Czytelnik Uważny na podstawie powyższych informacji znajdzie zależność między n, k i liczbą wierzchołków bryły.

Dodajmy jeszcze, że sferostożek i jego rodzina inspirują artystów. Jednym z pokazowych numerów austriackiego Zirkus Meer jest obracanie się pary ekwilibrystów wewnątrz sferostożka.

Małą Deltę przygotowała Kamila ŁYCZEK