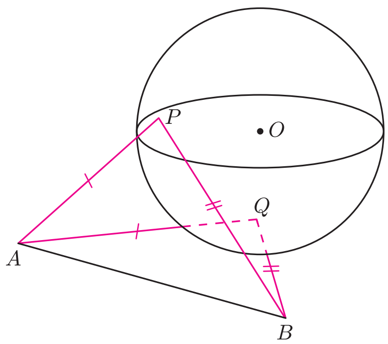
# Kącik przestrzenny (2)

## Najmocniejsze twierdzenie stereometrii

Rozpocznijmy od sformułowania tytułowego twierdzenia (łatwy dowód pozostawiamy Czytelnikowi).

**Twierdzenie 1.** *Dana jest sfera $o$ oraz takie punkty $A$ i $B$, że prosta $AB$ jest rozłączna ze sferą $o$. Prowadzimy dwie płaszczyzny przechodzące przez punkty $A$ i $B$ styczne do sfery $o$ w punktach $P$* i *$Q$* (rys. 1). *Wówczas*

a) $AP = AQ$,
b) *trójkąty $APB$ i $AQB$ są przystające.*




Rys. 1

Z części a) otrzymujemy, że jeśli do dwóch danych sfer poprowadzimy dwie wspólne styczne zewnętrzne, to odcinki łączące punkty styczności zawarte w tych stycznych będą równej długości (dlaczego?).

Okazuje się, że te proste fakty mogą prowadzić do bardzo ciekawych i niebanalnych wniosków. Przyjrzyjmy się kilku przykładom.

**1.** (IMO LONGLIST '85) *Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ścian $ABC$ i $BCD$ odpowiednio w punktach $P$ i $Q$. Dowieść, że $\sphericalangle APB = \sphericalangle CQD$.*

*Rozwiązanie.* Niech $R$ i $S$ będą punktami styczności sfery wpisanej odpowiednio ze ścianami $ACD$ i $ABD$. Trójkąty utworzone przez pewną krawędź i punkty styczności sfery wpisanej z dwoma ścianami zawierającymi tę krawędź są przystające. Wygodnie jest teraz wszystko rysować na siatce (rys. 2). Oznaczmy:

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle ASB = \alpha, \quad \sphericalangle BPC = \sphericalangle BQC = \beta, \quad \sphericalangle APC = \sphericalangle ARC = \gamma,$$
$$\sphericalangle CQD = \sphericalangle CRD = \alpha', \quad \sphericalangle ARD = \sphericalangle ASD = \beta', \quad \sphericalangle BQD = \sphericalangle BSD = \gamma'.$$

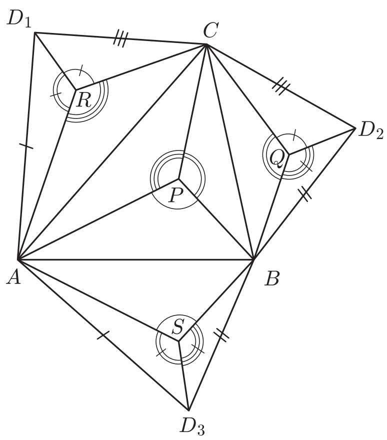
Otrzymujemy

$$\beta + \gamma' + \alpha' = 360^\circ, \quad \gamma + \alpha' + \beta' = 360^\circ, \quad \alpha + \beta' + \gamma' = 360^\circ, \quad \alpha + \beta + \gamma = 360^\circ.$$

Dodając stronami pierwsze trzy równości i uwzględniając czwartą, dostajemy

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^\circ.$$

Stąd i z trzeciej równości dostajemy $\alpha = \alpha'$. Zatem $\sphericalangle APB = \sphericalangle CQD$.

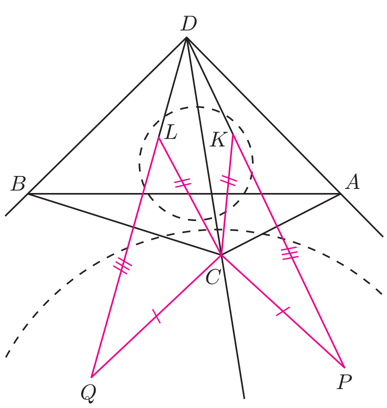



Rys. 2

Warto zapamiętać ten fakt, bo na pierwszy rzut oka jest dość zaskakujący (i, niestety, mało znany), a przydaje się w wielu miejscach. Czytelnikom pozostawiamy dowód, że analogiczna własność zachodzi również dla sfery dopisanej, jak i w przypadkach, gdy jeden lub dwa wierzchołki uciekną do nieskończoności.

**2.** (OM 54-III-5) *Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ściany $ABC$ w punkcie $H$, a sfera dopisana do tego czworościanu jest styczna do ściany $ABC$ w punkcie $O$. Dowieść, że jeżeli $O$ jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $ABC$, to $H$ jest punktem przecięcia wysokości tego trójkąta.*

Sięgając do broszurki z tej olimpiady, widzimy, że zadanie to rozwiązały zaledwie 3 osoby, jedna w połowie, a aż 122 prace zostały ocenione na 0 punktów! Jednakże zadanie to, jak za chwilę zobaczymy, jest bardzo łatwe – wystarczy zauważyć kilka par trójkątów przystających i porachować troszkę na kątach.

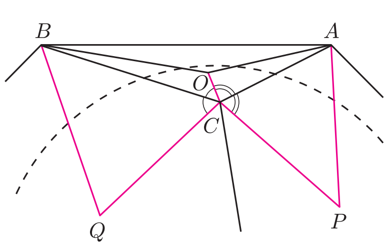



Rys. 3

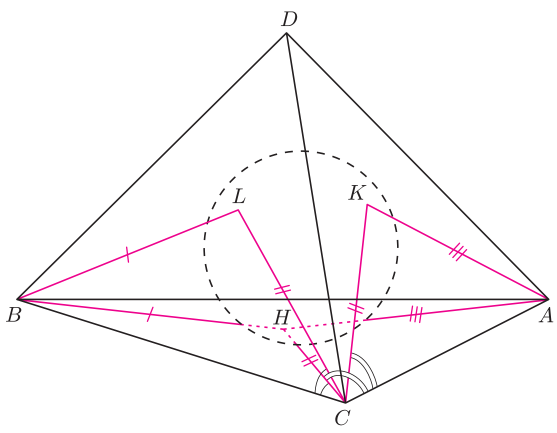
*Rozwiązanie.* Niech $K$ i $L$ będą punktami styczności sfery wpisanej w czworościan $ABCD$ odpowiednio ze ścianami $ACD$ i $BCD$, a $P$ i $Q$ punktami styczności sfery dopisanej odpowiednio z płaszczyznami $ACD$ i $BCD$. Wówczas trójkąty $KCP$ i $LCQ$ są przystające (rys. 3). Oznaczmy miary kątów trójkąta $ABC$ przy wierzchołkach $A, B, C$ odpowiednio przez $\alpha, \beta, \gamma$. Trójkąty $BQC$ i $BOC$ są przystające, skąd wynika, że $\sphericalangle BCQ = \sphericalangle BCO = 90^\circ - \alpha$ (rys. 4). Analogicznie $\sphericalangle ACP = 90^\circ - \beta$. Niech $\sphericalangle BCL = \varphi$. Wtedy $\sphericalangle ACK = \varphi + \beta - \alpha$ (bo $\sphericalangle PCK = \sphericalangle QCL$). Jednakże $\Delta BCH \equiv \Delta BCL$ i $\Delta ACH \equiv \Delta ACK$, więc

$$\gamma = \sphericalangle ACB = \sphericalangle BCH + \sphericalangle ACH = \sphericalangle BCL + \sphericalangle ACK = 2\varphi + \beta - \alpha$$

(rys. 5), skąd $\varphi = 90^\circ - \beta$. Zatem $CH \perp AB$. Analogicznie dowodzimy, że $BH \perp AC$, a to oznacza, że $H$ jest punktem przecięcia wysokości trójkąta $ABC$.




Rys. 4




Rys. 5

Dlaczego więc tak proste zadanie sieje takie spustoszenie na finale? Częstym błędem wielu olimpijczyków jest rysowanie wszystkich rzeczy na jednym rysunku. Na powyższym przykładzie przekonaliśmy się, jak dużo może dać zrobienie kilku rysunków i zaznaczenie na każdym z nich jedynie pewnych elementów! Być może brakuje też wiary, że do tego typu zadań wystarczają jedynie te prościutkie fakty przytoczone na początku. Pamiętajcie: wiara czyni cuda!

## Zadania

**3.** (RUS 1986) *Czworościan $ABXY$ jest opisany na sferze. Punkty $A$ i $B$ są ustalone, a punkty $X$ i $Y$ poruszają się. Udowodnić, że suma*

$$\sphericalangle AXB + \sphericalangle XBY + \sphericalangle BYA + \sphericalangle YAX$$

*jest stała.*

**4.** (OM 57-III-5) *Dany jest czworościan $ABCD$, w którym $AB = CD$. Sfera wpisana w ten czworościan jest styczna do ścian $ABC$ i $ABD$ odpowiednio w punktach $K$ i $L$. Dowieść, że jeżeli punkty $K$ i $L$ są środkami ciężkości ścian $ABC$ i $ABD$, to czworościan $ABCD$ jest foremny.*

Więcej zadań i objaśnienie skrótów na internetowej stronie *Delty*.

*Michał KIEZA*

## Rozwiązania zadań lingwistycznych

**Zadanie nr 1.** Oto wyrazy, z których tworzy się liczebniki w języku sulka:

- tgiang 1, lomin 2, korlotge 3, korlolo 4, ktiëk 5, mhelom 20;
- hori orom – oznacza dodawanie, lo – podwojenie;
- a – l. pojedyncza lub podwójna, o – l. mnoga (od 3).

Rzeczowniki mają te same formy w liczbie pojedynczej i podwójnej, natomiast inne w liczbie mnogiej (tu, sngu; vhoi, vuo). Istnieją osobne wyrazy dla czwórki kokosów oraz dla pary i czwórki owoców chlebowca (ngausmia, moulang, ngaitegaap).

Odpowiedzi:
(a) a ksie a tgiang: 1 kokos
o ngaitegaap a korlotge: 12 owoców chlebowca
o ngausmia a ktiëk: 20 kokosów
o vuo a lo ktiëk hori orom a tgiang: 11 orzechów betelu
(b) 2 pochrzyny: a lo tu a lomin
14 pochrzynów: o sngu a lo ktiëk hori orom a korlolo
15 owoców chlebowca: o ngaitegaap a korlotge hori orom a moulang hori orom a tgiang
20 orzechów betelu: o vuo a mhelom

**Zadanie nr 5.** Zdania w nahuatl zaczynają się od orzeczenia. Podmiot i dopełnienie (dopełnienia) niebędące zaimkami występują za nim w dowolnej kolejności, poprzedzone wyrazem in (rodzajnik określony). Czasownik otrzymuje kolejno następujące przedrostki:

- podmiot: ni- 1. os. l.p., ti- 2. os. l.p., — 3. os. l.p.;
- dopełnienie: nēch- 1. os. l.p., mitz- 2. os. l.p., k- 3. os. l.p.;
- kolejne dopełnienie: tē- 'kogoś, komuś', tla- 'coś',

przy czym w zdaniach złożonych postaci „$A$ powoduje, że $B$ robi $C$.”, $B$ traktowane jest jako dopełnienie (por. ang. konstrukcje jak „He makes them do …”), oraz następujące przyrostki:

- 'powodować, że …':
  - przy czasowniku nieprzechodnim (niedopuszczającym dopełnienia): -tia (z wydłużeniem poprzedzającego i),
  - przy czasowniku przechodnim: -ltia;
- 'robić dla': -lia (ze zmianą poprzedzającego a w i).

Ta sama czynność z dopełnieniem i bez często jest wyrażana za pomocą różnych czasowników.

Odpowiedzi:
(a) 18. tiktlazohtlaltia in zihuātl in kuauhxīnki:
powodujesz, że kobieta kocha cieślę;
powodujesz, że cieśla kocha kobietę
19. nēchtzāhtzītia: on powoduje, że krzyczę
20. tikhuīteki: bijesz go
21. nikēhuilia in kikatl in tīzītl:
śpiewam pieśń dla znachora
22. nikneki in ātōlli: chcę atole
23. mitztlakāhualtia: on powoduje, że coś zostawiasz
(b) 24. on powoduje, że robię atole:
nēchchīhualtia in ātōlli
25. robisz wino dla kogoś: tiktēchīhuilia in oktli
26. znachor powoduje, że śpisz: mitzkochītia in tīzītl
27. śpiewam coś: nitlaēhua
28. przewracam się: nihuetzi