Heron uogólniony?

Joanna JASZUŃSKA

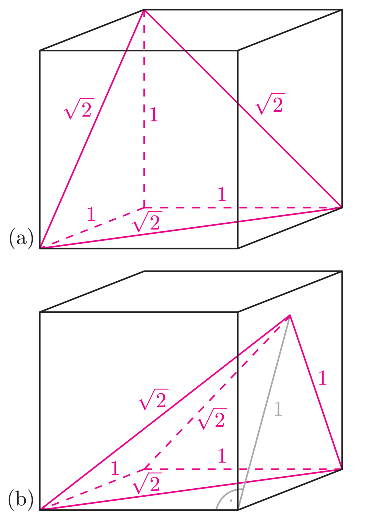
Wzór Herona $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ pozwala wyznaczyć pole trójkąta w zależności od długości jego boków (p to połowa obwodu). Czy da się go uogólnić, na przykład dla objętości czworościanu lub pola czworokąta?

Dowód wzoru Herona znaleźć można np. w *deltoidzie* 4/2008.

Objętość czworościanu a pola jego ścian

W zadaniu 3 z poprzedniego *deltoidu* wykazaliśmy, że nie można obliczyć objętości czworościanu, znając jedynie pola jego ścian oraz promień kuli opisanej, tym bardziej więc same pola ścian nie wyznaczają objętości.

Warto zauważyć, że pola ścian i promień r kuli *wpisanej* pozwalają wyrazić objętość czworościanu. Istotnie, odcinki łączące środek kuli z wierzchołkami czworościanu zadają podział na cztery ostrosłupy; podstawą każdego z nich jest inna ściana czworościanu, a wysokość każdego równa jest r. Stąd wzór na objętość czworościanu $V = \frac{1}{3}Tr$, gdzie T to pole jego powierzchni. Wzór ten jest jednak raczej uogólnieniem wzoru na pole trójkąta $S = pr$ niż wzoru Herona.



Rys. 1. Czarne sześciany i szara linia są pomocnicze. Na rysunku (b) górny wierzchołek czworościanu leży na prawej ścianie sześcianu, więc wysokość czworościanu jest mniejsza od 1.

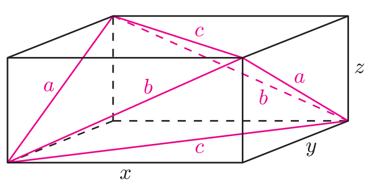
Objętość czworościanu a długości jego krawędzi

Same długości sześciu krawędzi, bez dodatkowej informacji o ich konfiguracji, nie wyznaczają objętości czworościanu, co ilustruje para kolorowych brył z rysunku 1. Mają one krawędzie o długościach $1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}$, przystające podstawy, ale różne wysokości, więc też różne objętości.

Długości wszystkich krawędzi wraz z ich konfiguracją definiują jednoznacznie czworościan, zatem też jego objętość. Niestety, w ogólnym przypadku wzór jest dość skomplikowany. Zajmijmy się więc szczególną klasą czworościanów *równościennych* – takich, których przeciwległe krawędzie są parami równe.

Podobnie jak w poprzednim *deltoidzie*, opiszmy na takim czworościanie równoległościan (rys. 2). Jest on prostopadłościanem, gdyż każda z jego ścian jest równoległobokiem o równych przekątnych, czyli prostokątem. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 2. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy wówczas $a^2 = y^2 + z^2$, $b^2 = z^2 + x^2$, $c^2 = x^2 + y^2$, więc

$$x = \sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}, \quad y = \sqrt{\frac{c^2+a^2-b^2}{2}}, \quad z = \sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}.$$



Rys. 2

Objętość czworościanu równościennego to objętość prostopadłościanu pomniejszona o objętości czterech przystających naroży, czyli

$$V = xyz - 4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}xyz = \frac{1}{3}xyz = \sqrt{\frac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{72}}.$$

Pole czworokąta a długości jego boków

Wzór na pole czworokąta zależny wyłącznie od jego boków (nawet z uwzględnieniem ich kolejności) istnieć nie może – wystarczy spojrzeć na prostokąt i nieprostokątny równoległobok o takich samych bokach.

Na szczęście przy dodatkowych założeniach istnieją ładne uogólnienia wzoru Herona. Jeśli czworokąt jest wpisany w okrąg, zachodzi *wzór Brahmagupty*:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Dla $d = 0$, czyli dla czworokąta zdegenerowanego do trójkąta, otrzymujemy wzór Herona.

Jeśli zaś przez φ oznaczymy połowę sumy przeciwległych kątów czworokąta (obojętne, których), a przez e i f długości przekątnych czworokąta, mamy dwa *wzory Bretschneidera*:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\varphi},$$

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - \frac{1}{4}(ac+bd+ef)(ac+bd-ef)}.$$

Dla czworokąta wpisanego w okrąg suma przeciwległych kątów równa jest $180°$, więc $\cos^2\varphi = 0$. Z kolei twierdzenie Ptolemeusza orzeka, że $ac + bd \geqslant ef$, a równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy na czworokącie można opisać okrąg. Zatem dla takiego czworokąta oba powyższe wzory upraszczają się do wzoru Brahmagupty. Ponadto wynika stąd, że czworokąt o ustalonych kolejnych bokach ma maksymalne pole właśnie wtedy, gdy jest wpisany w okrąg.