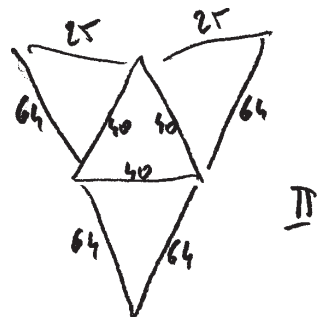
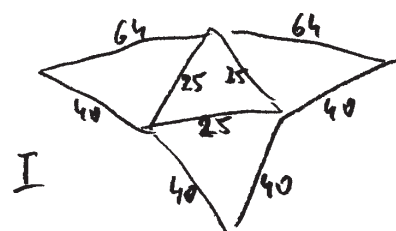


Czworościan to ostrosłup. Wybieramy jedną ścianę – „podstawę”; trzy ściany „boczne” odchylamy na zewnątrz, jakby były na zawiasach. Gdy się ułożą w płaszczyźnie podstawy, uzyskamy układ czterech trójkątów – płaską *siatkę* czworościanu; może ona ułatwić (lub utrudnić) jego wizualizację.

W zawodach okręgowych LXIV Olimpiady Matematycznej pojawiło się zadanie: Czy istnieje para czworościanów, których ściany można ponumerować odpowiednio S_1, S_2, S_3, S_4 oraz S'_1, S'_2, S'_3, S'_4 tak, by dla $i = 1, 2, 3, 4$ ściana S_i była trójkątem podobnym do S'_i , a przy tym te czworościany nie są bryłami podobnymi?

Pomysł zadania: Jerzy Bednarczuk.

Nietrudno zgadnąć, że takie pary istnieją. Uczestnicy zawodów wskazywali różne przykłady. Najczęściej rysowali siatki czworościanów, podając długości krawędzi. Rysunki – bez zachowania proporcji – należało traktować wyłącznie jako schematy, jak tu obok. Widzimy jedną parę siatek, I i II, oraz inną parę, III i IV. W obu tych parach podobieństwa $S_i \sim S'_i$ są jasne; przy tym skala podobieństwa pewnych par trójkątów jest różna od skali innych par, dlatego siatki reprezentują bryły niepodobne.



Który przykład lepszy? Istotnej różnicy niby nie widać. Gdyby rysunki były staranne, może dostrzeżelibyśmy, że różnica jest zasadnicza. Z trójkątów w schematach I i II nie da się w przestrzeni złożyć czworościanów! Z siatek III i IV – da się. Jak to uzasadnić?

Są różne sposoby – na przykład tak: wysokości dwóch trójkątów równoramiennych, widocznych w siatce III, wynoszą $h_1 = 12\sqrt{3}$ i $h_2 = 24\sqrt{2}$; deltoid utworzony przez te trójkąty zaczynamy zginać wzdłuż przekątnej i chcemy, by poruszające się wierzchołki znalazły się w odległości $d = 54$; do tego potrzeba i wystarcza, by był spełniony warunek $|h_1 - h_2| < d < h_1 + h_2$, co dla tych wartości szczęśliwie ma miejsce. Podobnie w układzie IV – ale nie w układach I i II; one *nie są* siatkami czworościanów.

Obejrzenie licznych przykładów – dobrych i złych – w sposób naturalny rodzi pytanie: dany trójkąt o bokach a, b, c oraz trzy odcinki o długościach p, q, r ; znaleźć warunek algebraiczny konieczny i dostateczny, by istniał czworościan o podstawie (a, b, c) i krawędziach p, q, r , odpowiednio przeciwległych do a, b, c . Otóż da się (być może, nieoczekiwanie) uzyskać ów warunek, rachując na liczbach zespolonych – w płaszczyźnie podstawy.

Nie tracimy ogólności przyjmując, że wierzchołki podstawy są reprezentowane przez liczby zespolone o module $|x| = |y| = |z| = 1$ (zysk dobrze znany: $\bar{x} = 1/x$). Wówczas

$$(1) \quad a^2 = |y - z|^2 = (y - z)(\bar{y} - \bar{z}) = -\frac{(y - z)^2}{yz}, \quad b^2 = -\frac{(z - x)^2}{zx}, \quad c^2 = -\frac{(x - y)^2}{xy}.$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$(2) \quad w = (x - y)(y - z)(z - x); \quad \text{wtedy} \quad \bar{w} = -\frac{w}{(xyz)^2}; \quad |w| = abc.$$

Dalej przydadzą się jeszcze takie zależności (oszczędzimy Czytelnikom szczegółowych rachunków, zachęcając do samodzielnego ich uzupełnienia):

$$(3) \quad b^2 + c^2 - a^2 = \frac{(z - x)(x - y)(y + z)}{xyz}, \quad a^2(b^2 + c^2 - a^2) = \frac{wx(z^2 - y^2)}{(xyz)^2}.$$

Teraz trochę geometrii. Okręgi o_x, o_y, o_z o środkach x, y, z i promieniach p, q, r są okręgami wielkimi trzech sfer w przestrzeni. Nasze pytanie brzmi: czy te sfery mają punkt wspólny? Punkt ów byłby wierzchołkiem szukanego ostrosłupa. Spodek opuszczonej z niego wysokości musi leżeć na prostej przechodzącej przez punkty przecięcia okręgów o_x, o_y ; również na analogicznej prostej dla okręgów o_x, o_z i dla o_y, o_z (jeżeli któreś dwa okręgi się nie przecinają, to sfery na pewno się nie spotkają).

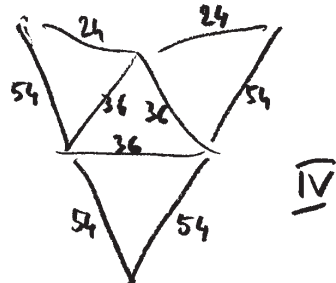
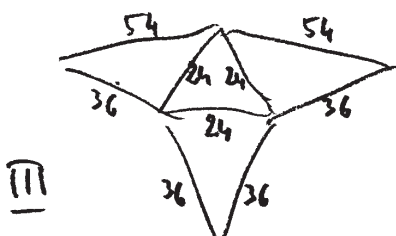
Problem sprowadza się do pytania płaskiego: czy trzy osie potęgowe, utworzone dla trzech par z tej trójki okręgów, przecinają się w punkcie, leżącym *wewnątrz* nich?

Punkt ów jest reprezentowany przez liczbę zespoloną f , scharakteryzowaną równościami

$$(4) \quad |f - x|^2 - p^2 = |f - y|^2 - q^2 = |f - z|^2 - r^2.$$

Oznaczmy tę wspólną wartość przez e ; to potęga punktu f względem każdego z trzech okręgów. Czworościan, o który chodzi, istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $e < 0$.

Gdy zapiszemy $|f - x|^2$ jako $(f - x)(\bar{f} - 1/x)$ (podobnie $|f - y|^2, |f - z|^2$) i wymnożymy nawiasy, składnik $f \cdot \bar{f}$ w równaniach (4) ulegnie redukcji, pozostawiając układ dwóch równań liniowych z niewiadomymi f, \bar{f} .



*Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

To są *sumy cykliczne* (w trójkach (x, y, z) , (p, q, r) , (a, b, c)). Na przykład napis

$$\sum \frac{fpxy}{3wb}$$

należałoby odczytać jako

$$\frac{fpxy}{3wb} + \frac{fqyz}{3wc} + \frac{frzx}{3wa}.$$

Zamiast prowadzić wymyślne przekształcenia według podanych wskazówek, wystarczy po prostu sprawdzić (ręcznie lub komputerowo), że różnica prawych stron wzorów (6) i (7), po podstawieniu wyrażeń (1), (2), (5), jest równa 0.

Jego rozwiązanie jest natychmiastowe i daje wynik

$$(5) \quad f = \frac{xyz}{w} \sum p^2(y-z), \quad \bar{f} = \frac{1}{w} \sum p^2 x(y-z).$$

Liczba e , równa każdemu z trzech wyrażeń, występujących w (4), jest oczywiście także ich średnią arytmetyczną:

$$(6) \quad e = \frac{1}{3} \sum (|f-x|^2 - p^2) = f\bar{f} - \frac{1}{3} \sum (x\bar{f} + \frac{f}{x}) + 1 - \frac{1}{3} \sum p^2.$$

Po wprowadzeniu wzorów (5) i uporządkowaniu wszystkiego według potęg p, q, r dostaniemy wielomian względem p^2, q^2, r^2 , w którym jako współczynniki pojawią się – po krótkich przekształceniach – wyrażenia, napisane po prawych stronach równości (3), mnożone lub dzielone przez pewne potęgi liczby w oraz iloczynu xyz . Uwzględniając jeszcze związki (2), pozbywamy się w ogóle liter x, y, z, w i doprowadzamy do wyniku

$$(7) \quad e = -\frac{L}{(abc)^2}, \quad L = -(abc)^2 + \sum ((b^2 + c^2 - a^2)(a^2 p^2 + q^2 r^2) - a^2 p^4).$$

Licznik L można zapisać w równoważnych postaciach (Czytelniku, sprawdź!):

$$(8) \quad L = \sum a^2 p^2 (b^2 + c^2 - a^2 + q^2 + r^2 - p^2) + \frac{1}{2} \prod (p^2 - a^2) - \frac{1}{2} \prod (p^2 + a^2) = \\ = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 0 & p^2 & q^2 & r^2 & 1 \\ p^2 & 0 & c^2 & b^2 & 1 \\ q^2 & c^2 & 0 & a^2 & 1 \\ r^2 & b^2 & a^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

zaś warunek istnienia czworościanu brzmi: $L > 0$.

Jego ściany to trójkąty o bokach (a, b, c) , (a, q, r) , (b, r, p) , (c, p, q) . Z postaci wyznaczkowej wzoru (8) widać, że nic się nie zmieni, gdy inną z tych trójek – np. (b, r, p) – przyjmiemy za ścianę podstawy. Dokładniej: po zastąpieniu szóstki uporządkowanej (a, b, c, p, q, r) przez (b, r, p, q, c, a) wartość L będzie taka sama; w wyznaczniku nastąpi jednoczesna permutacja wierszy i kolumn.

Zaczęliśmy od trójkąta o bokach a, b, c oraz trójki liczb p, q, r . Gdyby mówić, bardziej abstrakcyjnie, o szóstce liczb dodatnich (a, b, c, p, q, r) , należałoby jeszcze dołączyć warunek trójkąta dla trójki (a, b, c) : wówczas jeśli $L > 0$, to czworościan istnieje, więc automatycznie w każdej z trójek (a, q, r) , (b, r, p) , (c, p, q) warunek trójkąta jest spełniony. Podsumowując:

Dla liczb $a, b, c, p, q, r > 0$, czworościan o ścianach (a, b, c) , (a, q, r) , (b, r, p) , (c, p, q) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $L > 0$ oraz w co najmniej jednej z tych trójek (równoważnie: we wszystkich) spełniony jest warunek trójkąta.

Całe rozumowanie można też prowadzić inną metodą. Wymaga ona jednak wstępnego założenia, że istnieją trzy z czterech wymienionych trójkątów – na przykład trójkąty (a, q, r) , (b, r, p) , (c, p, q) . Gdy miary ich kątów między bokami (q, r) , (r, p) , (p, q) mają sumę mniejszą od 360° oraz spełniają warunek trójkąta (a to można kontrolować wzorem kosinusów), wówczas da się zaczepić odcinki p, q, r w jednym punkcie przestrzeni i zbudować żądany czworościan. Rzecz jasna, wychodzi znów warunek $L > 0$.

Trygonometryczne wyprowadzenie warunku $L > 0$ znajduje się w pracy: K. Wirth, A. S. Dreidling, *Edge lengths determining tetrahedrons*, *Elemente d. Math.* 64 (2009) 160-170.

Wróćmy jeszcze do wzoru (4): $e = |f-x|^2 - p^2$. Gdy czworościan istnieje, twierdzenie Pitagorasa pokazuje, że liczba $-e$ jest kwadratem wysokości h , opuszczonej na płaszczyznę ściany (a, b, c) . Ale iloraz we wzorze (7) ma w liczniku i w mianowniku wyrażenia jednakowego stopnia – coś się nie zgadza? To proste – jednorodność została utracona, gdy przyjęliśmy, że trójkąt (a, b, c) jest wpisany w okrąg o promieniu 1. Przyjmując, że ten okrąg ma promień R i prowadząc analogiczne rachunki, doszlibyśmy do równości

$$-e = \frac{R^2}{(abc)^2} \cdot L \quad (= h^2);$$

wymiar już jest, jak trzeba.

Zważywszy, że pole S trójkąta (a, b, c) jest dane wzorem $S = abc/4R$, zaś objętość ostrosłupa wzorem $V = Sh/3$, dochodzimy do konkluzji, że wielkość L we wzorach (7), (8) wyraża, z dokładnością do czynnika, kwadrat objętości rozważanego czworościanu: $L = 144V^2$. To analogon wzoru Herona dla pola trójkąta.

Na zakończenie słów parę o ocenianiu prac uczestników olimpiady. Przykład „siatki”, która nie jest siatką (nie skleja się w przestrzeni, jak I lub II), był oceniany na zero – trudno inaczej. Przykłady dobrych siatek (jak III i IV, jedynie bez uzasadnienia, że się dadzą skleić) otrzymywały ocenę niezerową – znów: trudno inaczej. Ta niezerowa ocena była jednak daleka od maksymalnej, co wywołało pretensje wielu zawodników: przecież część koncepcyjna została wykonana, zabrakło prostego sprawdzenia. No tak; ale zawodnicy, którzy dali przykłady nieistniejących brył, także wykonali ową pracę koncepcyjną, im też zabrakło jedynie prostego sprawdzenia – tyle, że niewykonalnego. Wszelako autorzy i tych, i tych prac, byli w większości zupełnie nieświadomi problemu realizacji przestrzennej, i jedynie kwestią szczęścia/pecha było znalezienie siatek jak (III,IV)/(I,II). Te prace należało w zasadzie ocenić jednakowo. Na zero? nonsens; na ocenę dodatnią? nonsens. Dedykujemy tę opowiastkę głosicielom opinii, że system punktowy jest świetnym narzędziem, pozwalającym ustalać wyniki konkursów i egzaminów rzetelnie, sprawiedliwie i obiektywnie.