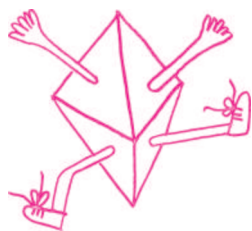


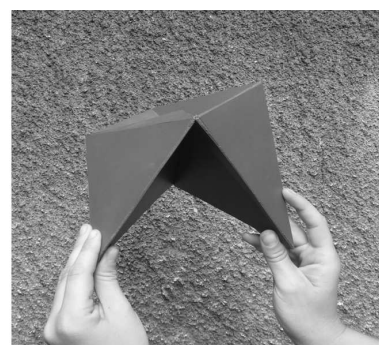
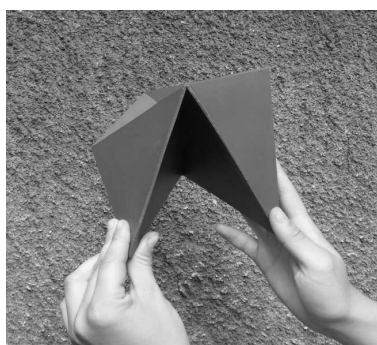
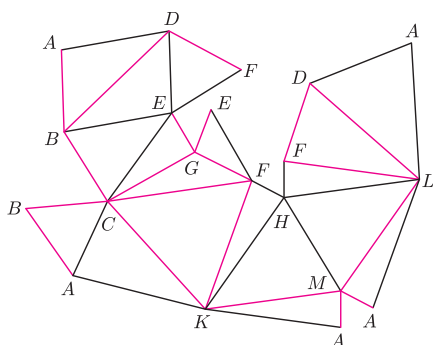
# Wielościany drżące i wielościany multistabilne

Aleksandra FLIS\*



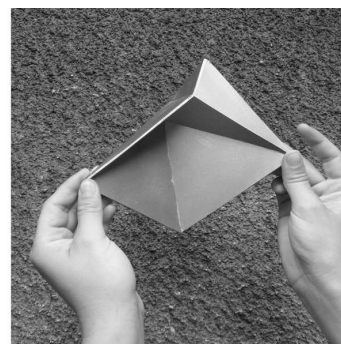
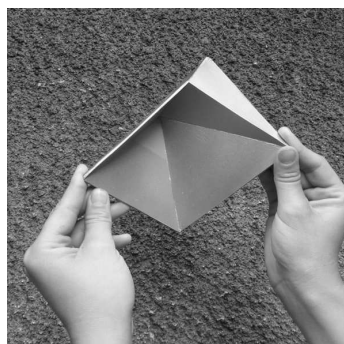
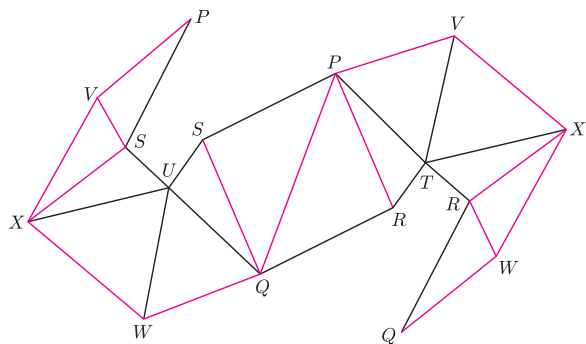
W *Delcie* była już mowa o ruchomych wielościanach, nazywanych też fleksorami; artykuły o nich ukazały się w 1987 i 1997 roku. Ruchomość wielościanu polega na tym, że gdybyśmy zbudowali model o sztywnych ścianach, a krawędziach poruszających się jak zawiasy, to moglibyśmy nim poruszać bez odkształcania ścian. Choć wydaje się to zaskakujące, ruchome wielościany rzeczywiście istnieją i zbudowanie takich brył, choćby z papieru, nie jest bardzo trudne.

Wielościany ruchome zostały odkryte w 1978 roku przez Roberta Connelly'ego, który skonstruował pierwszy przykład fleksora.



Siatka fleksora Connelly'ego (należy ją kleić tak, by kolorowe krawędzie były ostrzem na zewnątrz) i poruszanie gotowym fleksorem.

Drugi, prostszy przykład podał wkrótce potem Klaus Steffen.



I znów siatka i gotowy fleksor.

Jak dotąd są to wszystkie znane fleksory.

Istnieją też wielościany, które co prawda nie mogą się poruszać na tej samej zasadzie jak fleksory, mają jednak bardzo podobne własności. Ich ruch jest możliwy dzięki temu, że papier nie jest idealnie sztywny. Na jakiej zasadzie ów ruch się odbywa? Otóż najpierw należy zauważyć, że czasami wielościany o przystających ścianach i narożach mają kilka form różniących się kątami dwuściennymi. Jeśli dwie z nich są dość podobne, to możliwa jest nieniszcząca ścian zmiana z jednej pozycji na drugą, wykorzystująca elastyczność materiału, z którego jest wykonany model. Takie wielościany nazywamy multistabilnymi.

Jednym z najprostszych multistabilnych wielościanów jest dwustabilny „skaczący ośmiościan” (*bistable jumping octahedron*) opisany przez Waltera Wunderlicha i Caspara Schwabego w 1986 roku w pracy *Eine Familie von geschlossenen gleichflächigen Polyedern, die fast beweglich sind*. Wielościan ten ma dwie formy, które możemy zmieniać przez skrócenie jednej podstawy względem drugiej (patrz obrazki na następnej stronie). We wspomnianej pracy autorzy scharakteryzowali wszystkie istniejące wielościany multistabilne.



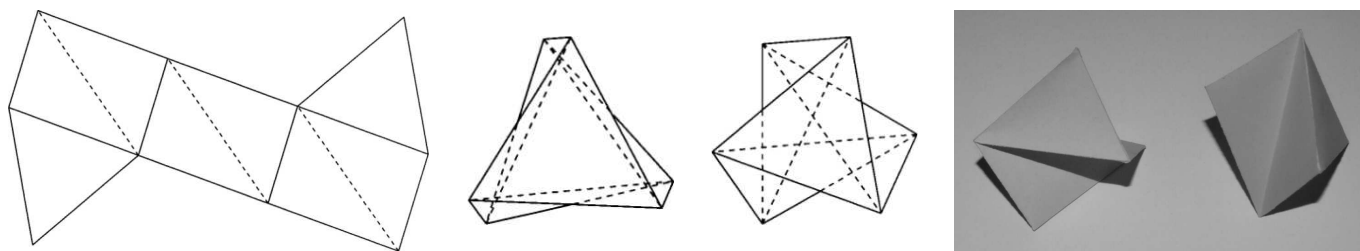
## Rozwiązanie zadania M 1398.

Przyjmijmy, że  $A_1, A_2, A_3$  to podzbiory zbioru  $\{1, 2, \dots, 19\}$  oznaczające składy drużyn na pierwszym treningu, a  $B_1, B_2, B_3$  – na drugim. Chcemy udowodnić, że dla pewnych  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  mamy  $|A_i \cap B_j| \geq 3$ . Przypuśćmy, że nie ma takiej pary zbiorów. Ponieważ  $A_1, A_2, A_3$  są parami rozłączne i  $B_1, B_2, B_3$  także, więc mamy

$$19 = |(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3)| = \left| \bigcup_{i,j=1}^3 A_i \cap B_j \right| = \sum_{i,j=1}^3 |A_i \cap B_j| \leq \leq 2 \cdot 9 = 18,$$

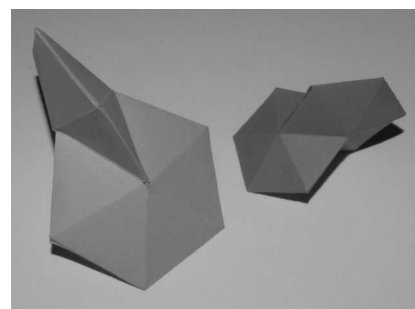
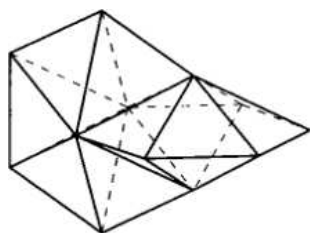
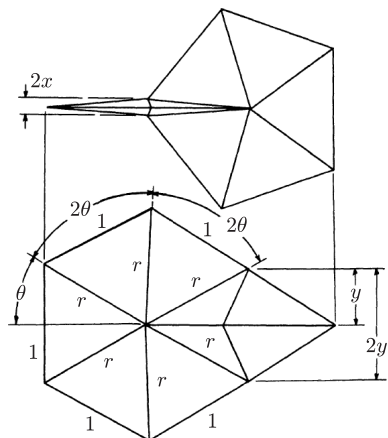
co daje sprzeczność.

\*nauczycielka matematyki, absolwentka Uniwersytetu Jagiellońskiego 2012



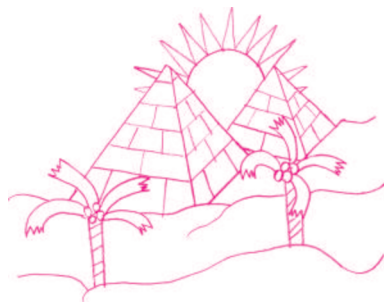
Siatka skaczącego wielościanu, widok z góry obu możliwych pozycji tego wielościanu oraz zdjęcie obu jego form.

Jednakże o istnieniu wielościanów multistabilnych wiedzano trochę wcześniej. W roku 1978 opublikowany został artykuł Michaela Goldberga *Unstable polyhedral structures*, w którym autor opisał liczne przykłady niestandardowych wielościanów, w tym wielościan multistabilny nazwany „dwupiramidami syjamskimi” (*Siamese dipyrramids*). Wielościan ten składa się z dwóch podwójnych piramid złączonych wspólną podstawą. Każda dwupiramida ma 10 ścian, które są trójkątami równobocznymi.

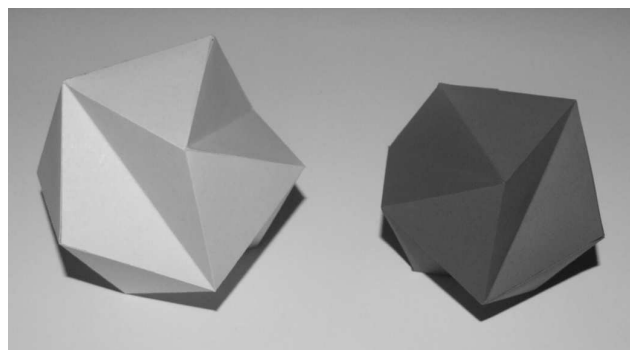


Rysunki i zdjęcie dwupiramid syjamskich.

Mimo iż narysowanie siatki takiego wielościanu (ewentualnie np. w czterech częściach) jest bardzo łatwe, to zbudowanie jego modelu jest dość trudne, ponieważ już przy małej niedokładności zmienia się charakter bryły. Jeśli równoboczne trójkąty zastąpimy przez równoramienne, których kąt przy wierzchołku równy jest  $59^\circ$  zamiast  $60^\circ$ , otrzymamy dwupiramidy, które w dwóch pozycjach całkowicie się złożą. Jeśli natomiast kąt przy wierzchołku powiększymy do  $62^\circ$ , stabilne pozycje pokryją się i otrzymamy wielościan innego rodzaju, mianowicie dwudziestościan drżący. W artykule Goldberga była mowa również o drżących wielościanach.



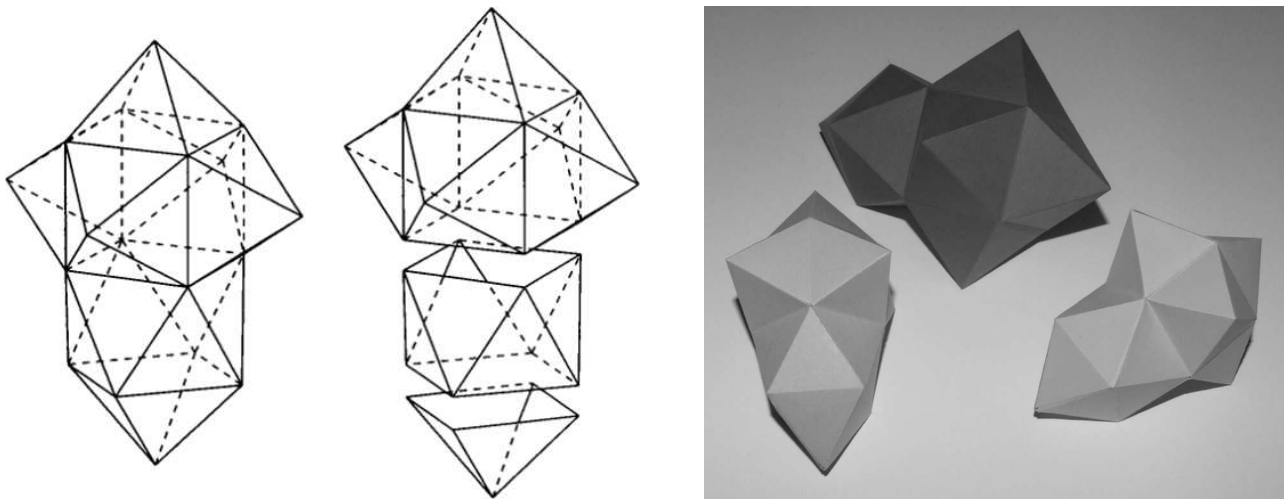
W wielościanach ruchomych możliwy jest płynny ruch między różnymi pozycjami. Wielościany multistabilne mają tylko kilka stabilnych form, a przejścia pomiędzy nimi następują w sposób skokowy. Wielościany drżące stanowią jeszcze inną grupę. Obserwując ruch modelu, nie można powiedzieć, ile stabilnych pozycji ma wielościan; tym wielościan drżący różni się od wielościanów multistabilnych, w których liczba stabilnych pozycji jest skończona.



Dwudziestościany Jessena.

Można jednak za pomocą obliczeń udowodnić, że podczas ruchu drżącego wielościanu jego ściany są nieznacznie zniekształcane, więc nie jest to fleksor.

Dwudziestościan foremny jest wypukły i sztywny. Jeśli jednak sześć par ścian o wspólnej krawędzi zastąpimy parami równoramiennej trójkątów, tworząc niewypukły dwudziestościan, otrzymamy wielościan Jessena. Każdy kąt dwuścienny to  $\frac{\pi}{2}$  lub  $\frac{\pi}{3}$ . Ten wielościan może poruszać się w niewielkim stopniu, zmieniając kąty dwuścienne wzdłuż dłuższych krawędzi.



Rysunek i zdjęcie wielościanów Masona.

Drżący jest też wielościan (odkryty przez Paula Masona), którego wszystkie ściany są trójkątami równobocznymi. Powstaje on przez wzniesienie ostrosłupów prawidłowych czworokątnych na każdej ścianie sześcianu oraz antygraniastosłupa, który oddziela jedną z tych piramid i sześcian.

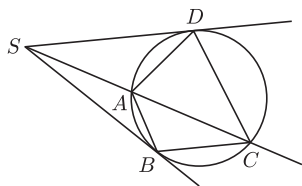
Na zakończenie warto zauważyć, że opisane powyżej zjawiska możliwe są wyłącznie w przypadku wielościanów niewypukłych. Wielościany wypukłe są sztywne, co wynika z twierdzenia Cauchy'ego o sztywności.

W 1766 roku Leonhard Euler postawił hipotezę, że każdy wielościan jest sztywny. Dopiero w 1813 roku Augustin Louis Cauchy wykazał, że jest to prawda dla wielościanów wypukłych. Cauchy w swoim dowodzie popełnił zresztą błąd, ponieważ nie rozważył wszystkich przypadków. Pomyłka Cauchy'ego pozostała niezauważona przez ponad 50 lat, jednak później dowód uzupełniono.



## Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ



**M 1396.** Czworokąt  $ABCD$  jest wpisany w okrąg. Styczne do okręgu w punktach  $B$  i  $D$  przecinają się w punkcie  $S$  (rysunek). Udowodnić, że punkt  $S$  leży na prostej  $AC$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $AB \cdot CD = AD \cdot BC$ .

Rozwiązanie na str. 23

**M 1397.** Udowodnić, że dla dowolnej liczby dodatniej  $x$  i liczby całkowitej  $n \geq 1$  prawdziwa jest nierówność

$$(1+x)^{n+1} \geq \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} x.$$

Rozwiązanie na str. 20

**M 1398.** Do klubu siatkarskiego należy 19 osób. Na ostatnich dwóch treningach wszyscy zawodnicy byli obecni i na każdym z nich podzielono ich na trzy zespoły: dwa sześciuosobowe i jeden siedmioosobowy. Udowodnić, że można wskazać 3 osoby, które na obu treningach były w jednej drużynie.

Rozwiązanie na str. 1

Przygotowali Andrzej MAJHOFER i Michał NAWROCKI

**F 839.** Podczas remontu wymieniono silnik samochodu na nowy o tej samej masie, ale dwa razy większej maksymalnej mocy. Ile razy wzrośnie maksymalna prędkość, z jaką może jechać ten samochód?

Rozwiązanie na str. 20

**F 840.** W środku sfery całkowicie pochłaniającej dochodzące do niej światło umieszczono lampę sodową. Lampa emituje światło z mocą 100 W. Przyjmując, że emitowane jest wyłącznie światło o długości fali 590 nm, obliczyć, ile fotonów w jednostce czasu pochłania sfera.

Rozwiązanie na str. 5

