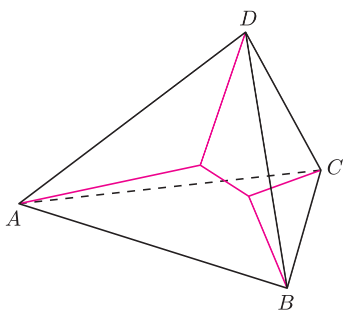
Kącik przestrzenny (17): Punkt Fermata–Torricellego



Rys. 1

Tym razem opowiemy o punkcie Fermata–Torricellego w czworościanie. Definiujemy go przez analogię do przypadku trójkąta: jest to punkt F, który minimalizuje sumę odległości od wierzchołków czworościanu. Zauważmy jednak, że łamana wyznaczona przez cztery odcinki łączące punkt F z wierzchołkami czworościanu wcale nie musi być najkrótszą siecią odcinków łączących te wierzchołki (bardzo często krótszą sieć uzyskuje się, biorąc łamaną złożoną z pięciu odcinków, jak na rysunku 1). Okazuje się, że jeśli miary wszystkich kątów trójściennych przy wierzchołkach czworościanu $ABCD$ są mniejsze od π, to punkt F leży wewnątrz tego czworościanu (przez miarę kąta trójściennego rozumiemy pole powierzchni części sfery jednostkowej o środku w wierzchołku tego kąta wyciętej przez ten kąt). Przy tym założeniu punkt ten ma szereg ciekawych własności, opisanych poniżej.

Twierdzenie. *Jeśli punkt F leżący wewnątrz czworościanu $ABCD$ minimalizuje sumę $AF + BF + CF + DF$, to*

a) *dwusieczne kątów płaskich AFB i CFD pokrywają się* (*tak samo dla par kątów BFC i AFD oraz AFC* i *BFD*),

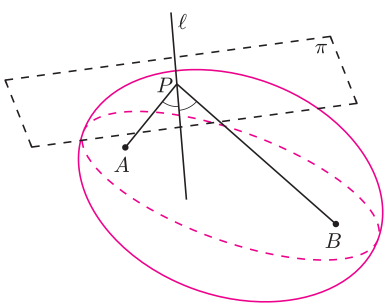
b) $\sphericalangle AFB = \sphericalangle CFD$, $\sphericalangle BFC = \sphericalangle AFD$ *i* $\sphericalangle AFC = \sphericalangle BFD$,

c) *jeśli $|\overrightarrow{XY}|$ oznacza długość wektora $\overrightarrow{XY}$, to spełniona jest zależność*

$$\frac{\overrightarrow{FA}}{|\overrightarrow{FA}|} + \frac{\overrightarrow{FB}}{|\overrightarrow{FB}|} + \frac{\overrightarrow{FC}}{|\overrightarrow{FC}|} + \frac{\overrightarrow{FD}}{|\overrightarrow{FD}|} = \overrightarrow{0},$$

d) $\cos\sphericalangle AFB + \cos\sphericalangle BFC + \cos\sphericalangle CFA = -1$.

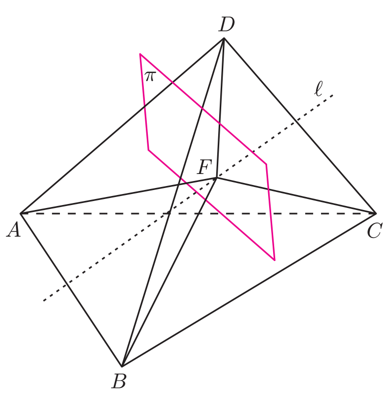
Zanim przejdziemy do dowodu twierdzenia, wprowadźmy pewien przydatny obiekt.



Rys. 2

Definicja. *Elipsoidą obrotową* o ogniskach A i B nazywamy powierzchnię powstałą w wyniku obrotu wokół prostej AB pewnej elipsy o ogniskach A i B.

Wprost z definicji wynika następująca własność: *elipsoida obrotowa o ogniskach A i B jest zbiorem wszystkich takich punktów X przestrzeni, że $AX + BX = a$, gdzie $a > AB$ jest pewną ustaloną liczbą rzeczywistą*. Ponadto, jeśli Y leży wewnątrz danej elipsoidy, to $AY + BY < a$, zaś jeśli Y leży na zewnątrz elipsoidy, to $AY + BY > a$ (łatwo to udowodnić, korzystając z nierówności trójkąta).

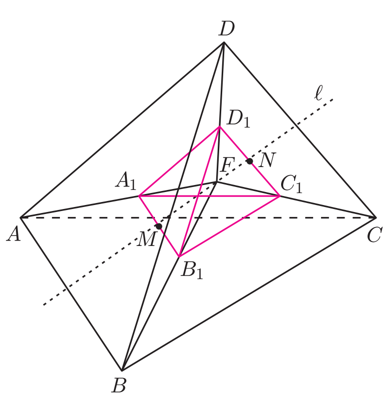


Rys. 3

Poniższy fakt jest odpowiednikiem pewnej własności elipsy, opisanej np. w *Delcie* 2/2007 na stronie 1.

Fakt. *Załóżmy, że punkt P leży na elipsoidzie o ogniskach A i B, zaś π jest płaszczyzną styczną do tej elipsoidy w punkcie P. Niech ℓ będzie prostą prostopadłą do płaszczyzny π, przechodzącą przez punkt P (rys. 2). Wtedy ℓ jest dwusieczną kąta płaskiego APB.*

Nietrudne uzasadnienie można znaleźć analogicznie do przypadku elipsy, co pozostawiamy Czytelnikom jako zadanie, a teraz przejdziemy do dowodu głównego twierdzenia.



Rys. 4

Dowód twierdzenia. a) Rozważmy elipsoidę obrotową $\mathcal{E}_1$ o ogniskach A i B oraz elipsoidę obrotową $\mathcal{E}_2$ o ogniskach C i D przechodzące przez punkt F. Ponieważ punkt F minimalizuje sumę $AF + BF + CF + DF$, to z wcześniejszych obserwacji wnosimy, że dane dwie elipsoidy nie mogą mieć punktów wspólnych wewnętrznych, a więc muszą być styczne w punkcie F (rys. 3). Niech π oznacza wspólną płaszczyznę styczną do tych elipsoid w punkcie F, zaś ℓ prostą prostopadłą do płaszczyzny π, przechodzącą przez F. Wówczas z przytoczonego powyżej faktu wynika, że prosta ta jest dwusieczną zarówno kąta płaskiego AFB, jak i CFD. Identyczne rozumowanie przeprowadzimy dla par kątów BFC i AFD oraz AFC i BFD.

b) Wybierzmy na półprostych $FA^{\rightarrow}$, $FB^{\rightarrow}$, $FC^{\rightarrow}$ i $FD^{\rightarrow}$ odpowiednio takie punkty A_1, B_1, C_1 i D_1, że $FA_1 = FB_1 = FC_1 = FD_1 = 1$ (rys. 4). Punkt F jest więc środkiem sfery opisanej na czworościanie $A_1B_1C_1D_1$. Niech ponadto prosta ℓ, zdefiniowana jak w części a), przecina odcinki A_1B_1 i C_1D_1 odpowiednio w punktach M i N. Skoro $FA_1 = FB_1$ i $FC_1 = FD_1$, to M i N są odpowiednio środkami odcinków A_1B_1 i C_1D_1. Zatem środek sfery opisanej na czworościanie $A_1B_1C_1D_1$ leży na prostej łączącej środki odcinków A_1B_1 i C_1D_1. W ten sam sposób uzasadniamy, że leży on na prostej łączącej środki odcinków B_1C_1 i A_1D_1. W takim razie musi pokrywać się ze środkiem ciężkości czworościanu $A_1B_1C_1D_1$, a to oznacza, że czworościan ten jest równościenny (korzystamy tu z twierdzenia opisanego w Kąciku przestrzennym 12, w *Delcie* 4/2012). Stąd wnioskujemy, że

$$\sphericalangle AFB = \sphericalangle A_1FB_1 = \sphericalangle C_1FD_1 = \sphericalangle CFD.$$

Analogicznie otrzymujemy pozostałe równości.

c) Wykorzystując zależności

$$\frac{\overrightarrow{FA}}{|\overrightarrow{FA}|} = \overrightarrow{FA_1}, \qquad \frac{\overrightarrow{FB}}{|\overrightarrow{FB}|} = \overrightarrow{FB_1}, \qquad \frac{\overrightarrow{FC}}{|\overrightarrow{FC}|} = \overrightarrow{FC_1}, \qquad \frac{\overrightarrow{FD}}{|\overrightarrow{FD}|} = \overrightarrow{FD_1},$$

widzimy, że postulowaną równość możemy przepisać w postaci

$$(*) \qquad \overrightarrow{FA_1} + \overrightarrow{FB_1} + \overrightarrow{FC_1} + \overrightarrow{FD_1} = \overrightarrow{0}.$$

Jeśli M i N są środkami odcinków A_1B_1 i C_1D_1, to

$$\overrightarrow{FA_1} + \overrightarrow{FB_1} = 2\overrightarrow{FM} \quad \text{oraz} \quad \overrightarrow{FC_1} + \overrightarrow{FD_1} = 2\overrightarrow{FN}.$$

Na koniec zauważmy, że skoro F jest środkiem ciężkości czworościanu $A_1B_1C_1D_1$, to $\overrightarrow{FM} = -\overrightarrow{FN}$.

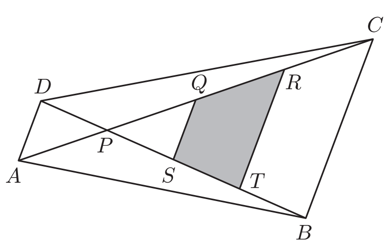
d) Wystarczy wykorzystać zależność $(*)$ i własności iloczynu skalarnego (np. $\cos \sphericalangle A_1FB_1 = \overrightarrow{FA_1} \circ \overrightarrow{FB_1}$). Uzupełnienie szczegółów pozostawiamy Czytelnikom.

Michał KIEZA

Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ

M 1384. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, którego przekątne przecinają się w punkcie P. Na przekątnej AC dane są jeszcze punkty Q i R, dzielące ją wraz z P na cztery równe części, tzn. $AP = PQ = QR = RC$. Na przekątnej DB dane są jeszcze punkty S i T, które wraz z P dzielą ją na cztery równe części, tzn. $DP = PS = ST = TB$. Obliczyć stosunek pól czworokątów $STRQ$ i $ABCD$.
Rozwiązanie na str. 6



M 1385. Udowodnić, że istnieje liczba C o następującej własności: jeśli równanie $1^k + \ldots + (m-1)^k = m^k$ ma rozwiązanie dla pewnych liczb naturalnych $k, m \geqslant 2$, to $m \leqslant C \cdot 2^k$.
Rozwiązanie na str. 8

Teza zadania M 1385 oznacza, że jeśli podane równanie diofantyczne ma rozwiązanie, to m nie może być *zbyt duże*. Do dziś pozostaje otwartym problemem hipoteza Erdősa, że to równanie nie ma rozwiązań (zob. również zadanie M 1374, *Delta* 1(464)/2013).

M 1386. Wielomian $x^n + a_{n-3}x^{n-3} + a_{n-4}x^{n-4} + \ldots + a_0$ ma współczynniki rzeczywiste $a_{n-3}, \ldots, a_0$ nie wszystkie równe 0. Udowodnić, że ma on mniej niż n pierwiastków rzeczywistych.
Rozwiązanie na str. 7

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 831. Księżyc obiega Ziemię i wraz z nią obiega też Słońce. Czy istnieją takie odcinki orbity Księżyca w jego ruchu wokół Słońca, w których „trójkąt” utworzony przez łuk orbity i promienie wodzące łączące jego końce ze środkiem Słońca nie jest figura wypukłą?
Rozwiązanie na str. 13

F 832. Jakie ciśnienie działa na zawór, którym gwałtownie zamknięto przepływ wody w rurze? Przed zamknięciem zaworu woda płynęła z prędkością u.
Rozwiązanie na str. 6