Rozwiązanie zadania M 1308.
Zauważmy, że dla $x \in [-2, 2]$ możemy napisać $x = 2\cos\varphi$. Wtedy $f(x) = 2\cos 3\varphi$ i ogólnie $f_n(x) = 2\cos 3^n\varphi$. To oznacza, że $f_n(x) = 0$ dla $x = 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2\cdot 3^n}$. Ponieważ funkcja cos jest malejąca w przedziale $(0, \pi)$, więc pierwiastki otrzymane dla $k = 0, 1, \ldots, 3^n - 1$ będą różne, a więcej pierwiastków f_n mieć nie może.

Wykorzystując definicję antyróżnicy, otrzymujemy wzór na sumowanie:

$$\mathfrak{S}x^{\underline{k}} = \frac{x^{\underline{k+1}}}{k+1} + c, \qquad k \neq -1.$$

Musimy jeszcze zastanowić się, czy istnieje taka funkcja $f(x)$, że

$$\Delta f(x) = x^{\underline{-1}} = \frac{1}{x+1}.$$

Łatwo można się zorientować, że jest nią

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{x}.$$

Zatem łącznie mamy (z dokładnością do stałej)

$$\mathfrak{S}x^{\underline{m}} = \begin{cases} \frac{x^{\underline{m+1}}}{m+1} & \text{dla } m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}, \\ 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{x} & \text{dla } m = -1. \end{cases}$$

Wprowadziliśmy pojęcia potęgi kroczącej i liczb Stirlinga II rodzaju, ale jak to połączyć z obliczaniem sumy $\sum_{k=0}^{n-1} k^m$? Okazuje się, że przydatne jest następujące twierdzenie

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)x^{\underline{k}}, \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Dowód tego twierdzenia można przeprowadzić indukcyjnie, opierając się na wzorze rekurencyjnym na $S(n, k)$.

Teraz już obliczanie sumy potęg przebiega sprawnie. Oto przykład: kolejno obliczamy

$$x^4 = \sum_{m=0}^{4} S(4,m)x^{\underline{m}} = x^{\underline{4}} + 6x^{\underline{3}} + 7x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}.$$

I ostatecznie

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^4 = \sum_{k=0}^{n-1}(k^{\underline{4}} + 6k^{\underline{3}} + 7k^{\underline{2}} + k^{\underline{1}}) = \mathfrak{S}_0^n x^{\underline{4}} + 6\mathfrak{S}_0^n x^{\underline{3}} + 7\mathfrak{S}_0^n x^{\underline{2}} + \mathfrak{S}_0^n x^{\underline{1}} =$$
$$= \frac{n^{\underline{5}}}{5} + 6\frac{n^{\underline{4}}}{4} + 7\frac{n^{\underline{3}}}{3} + \frac{n^{\underline{2}}}{2} = \frac{n^5}{5} - \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}.$$

Kącik przestrzenny (7)

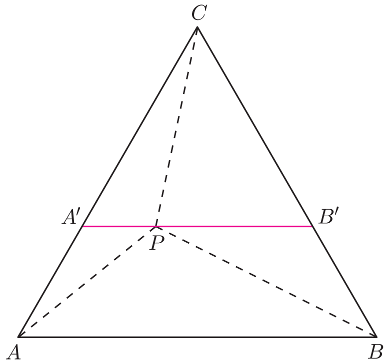
Zejdźmy na ziemię

Czasami, gdy zbytnio bujamy w obłokach, słyszymy od innych *zejdź na ziemię!* Kto by pomyślał, że ta zazwyczaj dość nieprzyjemna uwaga może być niekiedy cenną wskazówką do zadań ze stereometrii. Zdarza się bowiem, że rozwiązując problem przestrzenny, nie wiemy, jak się do niego zabrać, natomiast widzimy, że można sformułować analogiczne zadanie na płaszczyźnie. Czasem rozwiązanie takiego zadania na płaszczyźnie może nam podpowiedzieć, co zrobić w przestrzeni.

1. (OM 52-III-2) *Dowieść, że suma odległości dowolnego punktu leżącego wewnątrz czworościanu foremnego o krawędzi* 1 *od jego wierzchołków jest nie większa niż* 3.

Nietrudno zauważyć, że wierzchołki realizują maksimum, a intuicja podpowiada nam, że pewnie tylko one. Spróbujmy więc sformułować, a następnie rozwiązać, analogiczne zadanie na płaszczyźnie:

Dowieść, że suma odległości dowolnego punktu P leżącego wewnątrz trójkąta równobocznego ABC o boku a od jego wierzchołków jest nie większa niż $2a$.



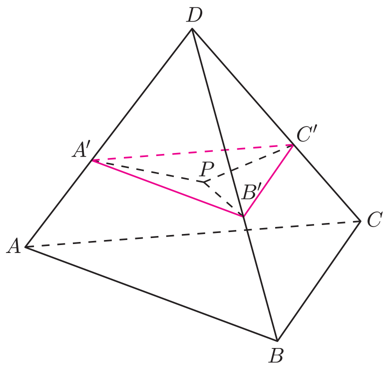
Rys. 1

Niech A' i B' będą punktami przecięcia prostej równoległej do AB i przechodzącej przez punkt P odpowiednio z bokami AC i BC. Trójkąt $A'B'C$ jest równoboczny i $CP \leqslant A'B'$. Ponadto stosując nierówność trójkąta, dostaniemy $AP \leqslant AA' + A'P$ oraz $BP \leqslant BB' + B'P$. Dodając te trzy nierówności stronami, otrzymujemy

$$AP + BP + CP \leqslant AA' + A'P + BB' + B'P + A'B' = 2a.$$

Nietrudno też przekonać się, że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy punkt P jest jednym z wierzchołków trójkąta ABC.

Przejdźmy do sytuacji trójwymiarowej. Przyjmijmy, że P leży wewnątrz czworościanu foremnego $ABCD$ o krawędzi 1. Wykorzystajmy naszą wiedzę



Rys. 2

o wersji płaskiej. Tym razem, zamiast prostej, poprowadźmy płaszczyznę równoległą do ABC przechodzącą przez punkt P i przecinającą krawędzie AD, BD, CD odpowiednio w punktach A', B', C'. Podobnie jak w wersji płaskiej, czworościan $A'B'C'D$ jest foremny, więc $DP \leqslant A'B'$. Znów z nierówności trójkąta otrzymamy

$$AP \leqslant AA' + A'P, \quad BP \leqslant BB' + B'P \quad \text{oraz} \quad CP \leqslant CC' + C'P,$$

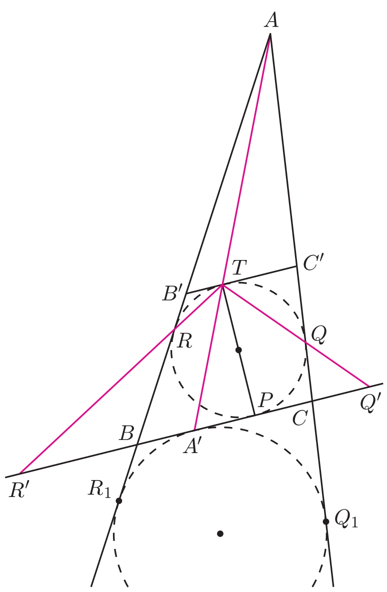
więc dostajemy

$$AP + BP + CP + DP \leqslant AA' + A'P + BB' + B'P + CC' + C'P + A'B' =$$
$$= 3 - 2A'B' + A'P + B'P + C'P \leqslant 3.$$

Ostatnia nierówność wynika z zastosowania wersji płaskiej dla trójkąta $A'B'C'$.

W tym zadaniu rozwiązanie analogicznego problemu płaskiego nie tylko podpowiedziało nam, jak znaleźć rozwiązanie wersji przestrzennej, ale nawet okazało się elementem dowodu.

2. (OM 60-III-5) *Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ścian BCD, CDA, DAB, ABC odpowiednio w punktach P, Q, R, S. Odcinek PT jest średnicą tej sfery, zaś punkty A', Q', R', S' są punktami przecięcia prostych AT, QT, RT, ST z płaszczyzną BCD. Dowieść, że punkt A' jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $Q'R'S'$.*



Rys. 3

Zadanie na pierwszy rzut oka wygląda dość przerażająco. Ale to tylko pozory, tak naprawdę jest dosyć łatwe. Żeby mieć lepszy ogląd, najpierw rozwiążmy wersję płaską:

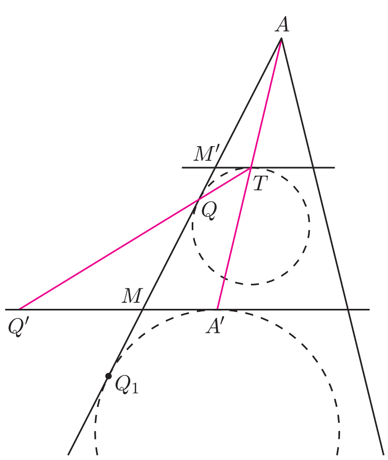
Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach P, Q, R. Odcinek PT jest średnicą tego okręgu. Proste AT, QT, RT przecinają prostą BC odpowiednio w punktach A', Q', R'. Wykazać, że A' jest środkiem odcinka $Q'R'$.

Rozwiązanie. Skoro PT jest średnicą, to styczna do okręgu wpisanego w punkcie T jest równoległa do BC. Niech B' i C' będą punktami przecięcia tej stycznej z bokami AB i AC (rys. 3). Trójkąty $AB'C'$ i ABC są jednokładne, skąd natychmiast wynika, że punkt A' jest punktem styczności okręgu dopisanego z bokiem BC. Z równoległości $B'C'$ i BC wynika też, że trójkąty $TC'Q$ i $Q'CQ$ są podobne, a skoro $TC' = QC'$, to $CQ' = CQ$. Niech Q_1 będzie punktem styczności okręgu dopisanego, stycznego do BC, z prostą AC. W takim razie $A'C = Q_1C$, a stąd natychmiast wynika, że

$$A'Q' = A'C + CQ' = Q_1C + QC = QQ_1.$$

Analogicznie, oznaczając przez R_1 punkt styczności okręgu dopisanego z bokiem AB, udowodnimy, że $R'A' = R_1R$. Ale $QQ_1 = RR_1$ – dowód jest więc zakończony.

Teraz rozwiązanie zadania w wersji przestrzennej nie powinno sprawić już żadnych problemów.



Rys. 4

Istotnie, prowadząc przez T płaszczyznę $B'C'D'$ równoległą do BCD, stwierdzamy, że punkt A' jest punktem styczności sfery dopisanej do czworościanu ze ścianą BCD. Dla wygody i przejrzystości rozumowania rozważmy przekrój czworościanu $ABCD$ oraz dwóch rozważanych sfer płaszczyzną ATQ (rys. 4) – cała reszta jest niepotrzebna, gdyż wersja płaska wyrobiła nam pewne intuicje. Punkt Q_1 styczności sfery dopisanej z płaszczyzną ACD leży na prostej AQ, należy więc do przekroju. Niech ponadto M i M' będą odpowiednio punktami przecięcia prostej AQ z prostą $A'Q'$ i prostą do niej równoległą przechodzącą przez punkt T. Postępując analogicznie jak w wersji płaskiej, otrzymamy kolejno równości:

$$M'T = M'Q, \qquad MQ = MQ', \qquad MA' = MQ_1,$$

skąd natychmiast wynika, że $Q'A' = QQ_1$, czyli $Q'A'$ jest równe długości odcinka stycznego do obu sfer. W ten sam sposób dowodzimy, że tę własność mają odcinki $R'A'$ i $S'A'$.

Zadanie to jest kolejnym przykładem, jak duże znaczenie w zadaniach przestrzennych ma czytelny rysunek zawierający tylko potrzebne rzeczy. A wersja płaska pomogła nam zdecydować, co tak naprawdę jest potrzebne do rozwiązania.

Michał KIEZA