największa moneta będzie zawsze znajdowała się na jednym z krańców ciągu. Zatem przewagę Ani w przypadku ciągu bitonicznego bardzo łatwo obliczyć – wystarczy zsumować liczby w porządku nierosnącym, biorąc co drugą liczbę ze znakiem minus. W naszym przypadku będzie to $5 - 3 + 2 - 1 = 3$.

Czytelnicy zechcą sprawdzić, że w przykładzie

$(**)$ 6 8 7 10 10 2 5 9 8

po zastosowaniu trzech operacji uzyskujemy bitoniczny ciąg

5 2 4

zatem i tym razem przewaga wynosi $5 - 4 + 2 = 3$.

A co z wyznaczeniem optymalnego ruchu? Otóż, jeśli w bitonicznym ciągu, powstałym po serii operacji, lewy nominał wynosi co najmniej tyle ile prawy (a zatem wzięcie monety z lewego krańca jest optymalnym ruchem), to również w pierwotnym ciągu wzięcie monety z lewego krańca jest optymalnym ruchem. Analogicznie w przypadku prawego krańca. Zatem w ciągu $(**)$ wzięcie 6 z lewego krańca jest optymalne, gdyż w ciągu bitonicznym nominał na lewym krańcu jest większy niż ten na prawym $(5 > 4)$.

Ostatecznie otrzymujemy przepis, który pozwala nam wyznaczyć optymalny ruch i wymaga jedynie liczby obliczeń rzędu n.

Małą Deltę przygotował Tomasz IDZIASZEK

Kącik przestrzenny (14): Inwersja w przestrzeni i rzut stereograficzny

Kiedy na płaszczyźnie mamy do czynienia z okręgami, to bardzo często posługujemy się rachunkiem na kątach, ponieważ znamy wiele przydatnych twierdzeń i faktów z tego zakresu. Niestety, trudno o analogiczne narzędzia w przestrzeni. Stanowi to wielki kłopot, gdy zmagamy się z zadaniami o sferach. Istnieje jednak kilka innych technik, skutecznych w zadaniach o okręgach, które działają również w przestrzeni. Są to: potęga punktu, jednokładność oraz inwersja. O tej ostatniej metodzie opowiemy w tym kąciku.

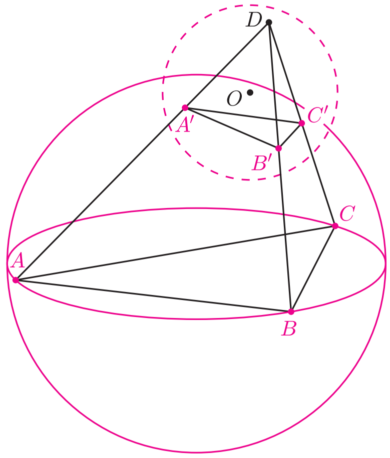
Przypomnijmy najpierw definicję i proste własności. Inwersją względem sfery S o środku O i promieniu R (mówi się o nich często: środek inwersji i promień inwersji) nazywamy przekształcenie, które przypisuje punktowi $A \neq O$ taki punkt A^*, leżący na półprostej $OA^{\rightarrow}$, że $OA^* \cdot OA = R^2$. Widać podobieństwo do definicji inwersji względem okręgu: ona wnętrze okręgu rozciąga na całe zewnętrze, a zewnętrze wpycha do wewnątrz – inwersja względem sfery podobnie zamienia jej wnętrze z zewnętrzem.

Inwersja względem sfery ma wiele przydatnych własności – oto niektóre z nich:

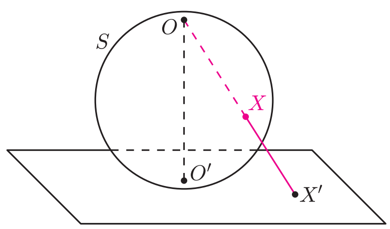
- inwersja jest przekształceniem odwrotnym do siebie,
- płaszczyzny i sfery przechodzą na płaszczyzny lub sfery,
- proste i okręgi przechodzą na proste lub okręgi,
- płaszczyzny i proste przechodzące przez środek inwersji przechodzą na siebie,
- płaszczyzny i proste nieprzechodzące przez środek inwersji przechodzą odpowiednio na sfery i okręgi przechodzące przez środek inwersji,
- sfery i okręgi nieprzechodzące przez środek inwersji przechodzą odpowiednio na sfery i okręgi nieprzechodzące przez środek inwersji,
- inwersja zachowuje kąty między krzywymi – kąt między krzywymi to kąt między prostymi stycznymi do tych krzywych w ich punkcie przecięcia.

Czytelnik dostrzeże, iż – niestety – nie można mówić o zachowaniu kąta między powierzchniami, gdyż pojęcie kąta między powierzchniami sensu nie ma: płaszczyzny styczne do dwóch powierzchni w różnych ich punktach wspólnych mogą tworzyć różne kąty dwuścienne.

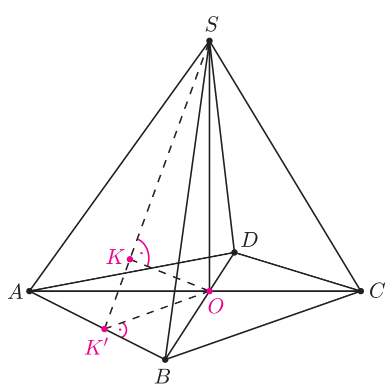
Wygodnie jest jednak mówić o kątach między płaszczyznami, czy między sferami, czy też między płaszczyznami i sferami, bo w tych przypadkach rozwartość powstałych kątów dwuściennych nie zależy od tego, który punkt wspólny rozpatrujemy. Takie kąty są również przez inwersję zachowywane. Wykorzystamy to w następującym zadaniu, którego płaski odpowiednik jest banalnym rachunkiem na kątach.



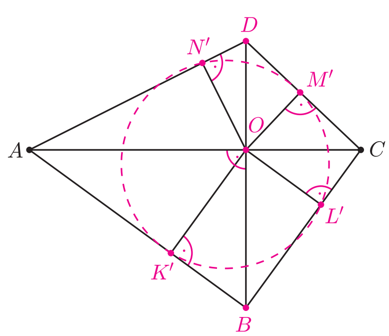
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

1. (Rosja 2001) *Sfera S o środku w środku okręgu opisanego na trójkącie ABC przecina krawędzie DA, DB, DC czworościanu $ABCD$ odpowiednio w punktach A', B', C'. Płaszczyzny styczne do tej sfery odpowiednio w punktach A', B', C' przecinają się w punkcie O. Wykazać, że punkt O jest środkiem sfery opisanej na czworościanie $A'B'C'D$.*

Rozwiązanie. Najpierw przetłumaczmy tezę na język inwersji. Należy po prostu wykazać, że sfera przechodząca przez punkty A, B, C, A', B', C' i sfera opisana na czworościanie $A'B'C'D$ są prostopadłe (rys. 1). Zauważmy, że

$$DA \cdot DA' = DB \cdot DB' = DC \cdot DC' = r^2$$

dla pewnej liczby r. Rozważmy inwersję o środku D i promieniu r. Zauważmy, że sfera S przechodzi na siebie, a punkty A', B', C' odpowiednio na A, B, C (i na odwrót). Obrazem drugiej z rozważanych sfer będzie więc płaszczyzna przechodząca przez punkty A, B, C. Jednakże środek sfery S leży właśnie na płaszczyźnie ABC, skąd wniosek, że płaszczyzna ta jest do niej prostopadła. A skoro inwersja zachowuje kąty między powierzchniami, to sfera przechodząca przez punkty A, B, C, A', B', C' i sfera opisana na czworościanie $A'B'C'D$ też są prostopadłe.

Bardzo ważnym, szczególnym przypadkiem inwersji jest tak zwany *rzut stereograficzny*. Załóżmy, że punkt O leży na sferze S, zaś płaszczyzna π jest styczna do tej sfery w punkcie O' symetrycznym do O względem środka tej sfery (rys. 2). Obrazem dowolnego punktu X na sferze jest punkt X' przecięcia prostej OX z płaszczyzną π. Niezwykle ważną własnością rzutu stereograficznego jest to, że jest on niczym innym, jak inwersją o środku O i promieniu OO', chociaż interesuje nas jedynie obraz sfery S w tej inwersji. W szczególności przekształcenie to ma wszystkie własności inwersji. Popatrzmy, jak je wykorzystać w następującym zadaniu.

2. (OM 15-III-6) *Dany jest ostrosłup $ABCDS$, którego podstawą jest czworokąt wypukły $ABCD$ o prostopadłych przekątnych AC i BD, a rzutem prostokątnym wierzchołka S na podstawę jest punkt O przecięcia przekątnych podstawy. Udowodnić, że rzuty prostokątne punktu O na ściany boczne ostrosłupa leżą na jednym okręgu.*

Rozwiązanie. Zauważmy najpierw, że rozważane rzuty leżą na sferze o średnicy OS. Weźmy rzut stereograficzny tej sfery z punktu S na płaszczyznę $ABCD$ (rys. 3). Niech K będzie rzutem prostokątnym punktu O na ścianę ABS. Płaszczyzna OSK jest prostopadła do krawędzi AB, skąd wynika, że obraz K' punktu K w tym przekształceniu będzie rzutem prostokątnym punktu O na krawędź AB. Analogicznie udowodnimy, że obrazami pozostałych rzutów są rzuty punktu O na pozostałe boki czworokąta $ABCD$. Jednakże w czworokącie o prostopadłych przekątnych rzuty prostokątne punktu przecięcia przekątnych leżą na jednym okręgu (łatwy dowód tego faktu pozostawiamy Czytelnikowi – rys. 4). Przeciwobrazy tych rzutów leżą więc na okręgu położonym na sferze o średnicy OS.

Zadania

3. (Rosja 1999) *Przez wierzchołek A czworościanu $ABCD$ poprowadzono płaszczyznę styczną do sfery opisanej na tym czworościanie. Udowodnić, że proste, wzdłuż których płaszczyzna ta przecina płaszczyzny ścian ABC, ACD, ABD, tworzą sześć równych kątów wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$AB \cdot CD = AC \cdot BD = AD \cdot BC.$$

4. *Wykazać, że dla dowolnego czworościanu istnieje trójkąt, którego boki są równe co do wartości iloczynom przeciwległych krawędzi tego czworościanu. Wykazać dodatkowo, że pole tego trójkąta jest równe $6VR$, gdzie V i R oznaczają odpowiednio objętość i promień sfery opisanej na czworościanie (wzór Crellego).*

5. (Zwardoń 2007) *Rozstrzygnąć, czy istnieje taki skończony zbiór kół na płaszczyźnie o parami rozłącznych wnętrzach, że każde z danych kół jest styczne do dokładnie 5 spośród pozostałych kół.*

Więcej zadań znajduje się na stronie internetowej *Delty*.

Michał KIEZA