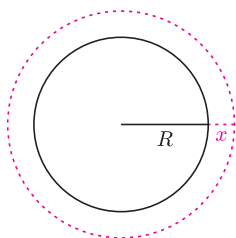




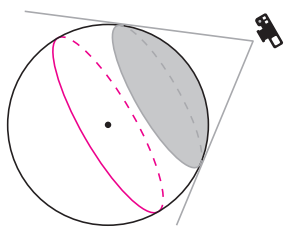
W całym artykule zakładamy, że Ziemia jest idealną kulą.



Rys. 1. Widok od strony bieguna północnego.

Wynik nie zależy od promienia Ziemi. Tę samą wartość (około 16 cm) otrzymamy dla kuli dowolnego rozmiaru, np. pomarańczy lub kuli o rozmiarach Słońca.

Rozwiązanie nie zależy od szerokości geograficznej Oslo. Gdyby rozważać inne miejsce startu na południku $10^\circ E$ (np. Tunis), odpowiedzi byłyby identyczne.



Rys. 2

Zadanie 2 to przeformułowany problem z XXVII Olimpiady Matematycznej.

Okręgi wielkie

Joanna JASZUŃSKA

Którędy przebiega najkrótsza droga lotnicza z Warszawy do Vancouveru? Wbrew pozorom – mimo podobnej szerokości geograficznej – wcale nie wzdłuż równoleżnika, a nad Grenlandią, o czym łatwo się przekonać, naciągając nitkę na globusie.

Najkrótsza droga między dwoma punktami na powierzchni Ziemi prowadzi bowiem wzdłuż krótszego z łuków okręgu wielkiego przechodzącego przez te punkty. *Okrąg wielki* to taki okrąg na powierzchni kuli, którego środek pokrywa się ze środkiem kuli. Przykładami okręgów wielkich na powierzchni Ziemi są pary przeciwległych południków, a także równik, ale już żaden inny równoleżnik.

1. Wyobraźmy sobie ziemski równik jako stalową obręcz. Wydłużamy tę obręcz o 1 metr i umieszczamy tak, żeby równomiernie odstawiała od powierzchni Ziemi (rys. 1). Czy przez otrzymaną w ten sposób szczelinę precyzyjnie się mysz?
2. Multimilioner leci z Oslo (ok. $60^\circ N$, $10^\circ E$) do cioci, mieszkającej w Ameryce Południowej, w pewnym dużym mieście prawie na równiku. Gdzie mieszka ciocia, jeśli prywatny odrzutowiec multimilionera, lecący do niej najkrótszą drogą, startuje w tym celu dokładnie w kierunku zachodnim? Jaka jest odległość pomiędzy Oslo a miastem cioci (obwód Ziemi to około 40 000 km)?
3. Ile trzeba zrobić zdjęć globusa, by w sumie uwiecznić na nich każde miejsce na Ziemi? Podpórkę od globusa, zasłaniającą być może fragmenty, zaniedbujemy.

Rozwiązania

R1. Oznaczmy przez R promień Ziemi, a przez x rozmiar otrzymanej szczeliny. Obręcz odstawiająca od powierzchni Ziemi ma długość $2\pi(R+x)$ i wiemy, że długość ta jest równa $2\pi R + 1$. Stąd $2\pi x = 1$, czyli $x = \frac{1}{2\pi} \approx \frac{1}{6,28}$ metra. Wobec tego obręcz odstawia od powierzchni Ziemi o około 16 cm – mysz swobodnie się zmieści. \square

R2. Samolot leci najkrótszą drogą, a więc po łuku pewnego okręgu wielkiego przechodzącego przez Oslo. Ponieważ startuje dokładnie na zachód, jest to ten okrąg wielki, dla którego Oslo jest punktem położonym najbardziej na północ. Okrąg ten przecina się z równikiem w takich dwóch przeciwległych punktach, dla których Oslo jest środkiem łączącego je półokręgu. Stąd długości geograficzne Oslo i miasta cioci różnią się o $\frac{1}{4} \cdot 360^\circ = 90^\circ$. Ciocia mieszka więc w mieście o współrzędnych ok. $0^\circ N$, $80^\circ W$, czyli w Quito, stolicy Ekwadoru.

Odległość z Oslo do cioci to $1/4$ długości okręgu wielkiego, czyli około 10 000 km. \square

R3. Obszar, który mieści się na pojedynczym zdjęciu, zawarty jest wewnątrz pewnej półsfery (rys. 2). Jej brzegiem jest okrąg wielki, którego żadnego punktu nie ma na tej fotografii (zaznaczony kolorem na rys. 2). Stąd dwa zdjęcia na pewno nie wystarczą, bo na każdym obejmujemy mniej niż połowę powierzchni Ziemi.

Wykażemy, że trzy zdjęcia również nie wystarczą. Przy pierwszym zdjęciu nie obejmujemy żadnego punktu z pewnego okręgu wielkiego Γ_1 , przy drugim – żadnego punktu z pewnego okręgu wielkiego Γ_2 . Okręgi te przecinają się w dwóch przeciwległych punktach Ziemi A i B lub pokrywają się, wtedy wybierzmy jako A i B dowolne dwa ich przeciwległe punkty. Nie da się na pojedynczym (trzecim) zdjęciu objąć obu tych dotychczas niesfotografowanych punktów A i B .

Pokażemy teraz, że zdjęcia z wierzchołków dowolnego czworościanu zawierającego globus obejmują całą powierzchnię. Rozważmy dowolny punkt C na globusie i płaszczyznę \mathcal{P} styczną do globusa w C . Skoro czworościan zawiera globus, to co najmniej jeden z jego wierzchołków musi leżeć na płaszczyźnie \mathcal{P} lub po przeciwnej jej stronie, niż globus. Z takiego wierzchołka widać punkt C . \square

Zadania domowe

4. Czy na powierzchni Ziemi istnieje taki trójkąt o bokach wyznaczonych przez najkrótsze drogi pomiędzy wierzchołkami, który ma wszystkie kąty proste?
5. Wędrowiec poszedł 10 km na południe, potem 10 km cały czas na wschód, wzdłuż równoleżnika, następnie 10 km na północ i wrócił w ten sposób do punktu wyjścia. Spotkał tam pewne zwierzę. Jeśli był to niedźwiedź, to jakiego koloru? Czy mógł to być pingwin?