

Kącik przestrzenny (11) Jak wyjść z dżungli?

Każdy, kto był w dżungli lub chociaż widział ją w jakimś filmie, wie, że poruszanie się po niej jest, delikatnie mówiąc, dosyć uciążliwe. Stanowi to ogromny kłopot szczególnie wtedy, gdy ktoś się w niej zgubi i chce się jakoś wydostać. Nie dość, że nie wiadomo, w jakim kierunku iść, to w ogóle ciężko jest nam pokonywać przeszkody (a rozwiązania siłowe, takie jak maczeta, niewiele dają). Istnieje następujące zalecenie: wystarczy znaleźć strumień (co zresztą wcale nie musi być łatwe), a potem liczyć na to, że zaprowadzi nas on do większej rzeki, a ta, być może, do morza.

Podobnie jest z zadaniem pochodzącym z finału olimpiady rosyjskiej z 1994 roku – oto ono:

Punkt H przecięcia wysokości AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 czworościanu $ABCD$ leży wewnątrz tego czworościanu oraz jest środkiem sfery wpisanej w czworościan $A_1B_1C_1D_1$. Dowieść, że czworościan $ABCD$ jest foremny.

Rysunek do tego zadania jest potworną płataniną kresek – zupełnie nic nie widać. Może się wydawać, że znajdujemy się w samym środku dżungli... Okazuje się jednak, że wystarczy uczynić jedno drobne spostrzeżenie (czyli wypatrzeć strumień), które zaprowadzi nas łatwo do celu. Zatem do dzieła!

Z poprzednich kącików wiemy już, że warto zrobić sobie kilka rysunków, na których będą tylko potrzebne nam kreski. No właśnie, tylko co narysować, a czego nie? Wydaje się, że potrzebujemy stosunkowo dużo kresek (rys. 1) i właściwie nie widać, jak wykorzystać fakt, że punkt H jest środkiem sfery wpisanej w czworościan $A_1B_1C_1D_1$. Można tylko zobaczyć, że płaszczyzny wyznaczone przez dwie wysokości czworościanu $ABCD$ są płaszczyznami dwusiecznymi odpowiednich kątów dwusiecznych czworościanu $A_1B_1C_1D_1$, ale co zrobić potem?

Próbujemy więc dalej. Pamiętamy również, że gdy nie wiemy, co zrobić w przestrzeni, to warto rozwiązać analogiczne zadanie na płaszczyźnie. No to rozwiążmy! Zakładamy, że ortocentrum danego trójkąta ostrokątnego jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt utworzony przez spodki jego wysokości i wtedy... No właśnie, niestety, na płaszczyźnie jest inaczej, bowiem zachodzi łatwe do udowodnienia

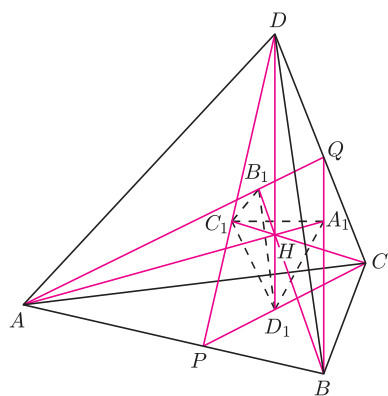
Twierdzenie 1. *Punkt H przecięcia wysokości AD, BE i CF dowolnego trójkąta ostrokątnego jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt DEF (rys. 2).*

Tym razem nie uda się nam „zejść na ziemię”. Zadanie wydaje się niemożliwe do rozwiązania. Ale przecież nie ma rzeczy niemożliwych, są tylko takie, których jeszcze nie potrafimy!

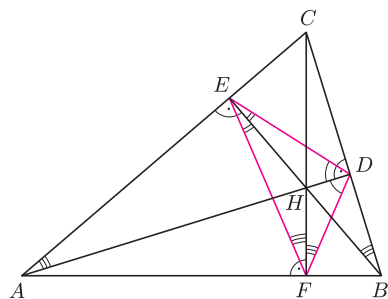
Mimo wszystko może ten płaski odpowiednik zadania do czegoś nam się przyda. Przyjrzyjmy się dokładniej płaszczyźnie ABQ na rysunku 3. Wysokości czworościanu AA_1, BB_1 oraz odcinek PQ są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABQ , a H jego ortocentrum. Korzystając teraz z twierdzenia 1, wnosimy, że H jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt A_1B_1P , czyli w szczególności $\sphericalangle A_1PH = \sphericalangle B_1PH$. Krawędź C_1D_1 leży w płaszczyźnie CDP i przecina odcinek PQ w punkcie T . Intuicja podpowiada nam, że, być może, zachodzi równość $\sphericalangle A_1TH = \sphericalangle B_1TH$. Może miary tych kątów płaskich są równe miarom odpowiednich kątów dwusiecznych między płaszczyzną CDP a płaszczyznami $A_1C_1D_1$ i $B_1C_1D_1$ (których równość łatwo jest uzasadnić)? Niestety, w ogólnej sytuacji wcale nie musi tak być. Czyżby intuicja nas zawiodła? Otóż nie – można znaleźć uzasadnienie. Mianowicie, jeśli płaszczyzna CDP jest płaszczyzną dwusieczną kąta dwusiecznego między płaszczyznami $A_1C_1D_1$ i $B_1C_1D_1$, to płaszczyzny te są symetryczne względem CDP . Ponadto z prostopadłości płaszczyzn ABQ i CDP wynika, że również proste A_1T i B_1T są symetryczne względem płaszczyzny CDP . To zaś oznacza, że $\sphericalangle A_1TH = \sphericalangle B_1TH$. W takim razie trójkąty A_1PT i B_1PT są przystające, skąd wniosek, że $PA_1 = PB_1$. Strumień został więc znaleziony! Dalej będzie już z górki.

Teraz w nietrudny sposób można wykazać, że $AQ = BQ$ (dowód pozostawiamy Czytelnikowi), a w takim razie też $AD = BD$. Analogicznie dowodzimy, że dowolne dwie sąsiednie krawędzie są równe, co kończy dowód. Nie ma rzeczy niemożliwych: każde, nawet najbardziej skomplikowane zadanie da się rozwiązać!

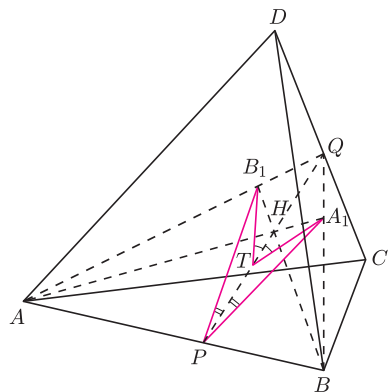
Michał KIEZA



Rys. 1. Nawet jeśli narysujemy tylko płaszczyzny $ABQ, CDP, A_1C_1D_1, B_1C_1D_1$, to i tak rysunek jest bardzo nieczytelny.



Rys. 2



Rys. 3