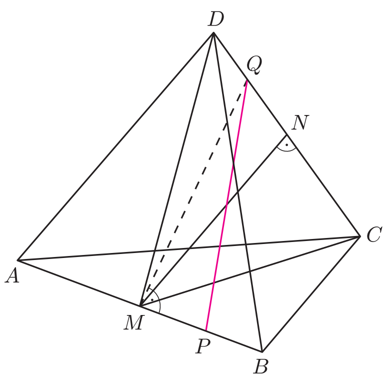
Kącik przestrzenny (10) Trzy rozwiązania pewnego zadania

W tym kąciku zajmiemy się pewnym zadaniem o czworościanie foremnym, o którym, między innymi, miałem okazję opowiadać na XLVI Szkole Matematyki Poglądowej pod hasłem ***Podejście niestandardowe***.

Dany jest czworościan foremny o krawędzi długości $a+b$. Punkty P i Q leżą na krawędziach AB i CD, przy czym $AP=a$, $BP=b$, $CQ=a$, $DQ=b$. Znaleźć długość odcinka PQ.

Zadanie jest szkolne, a więc zobaczmy, jak wygląda typowo szkolny sposób rozwiązywania.



Rys. 1

Sposób I – za pomocą twierdzenia Pitagorasa

Oznaczmy przez M i N środki krawędzi AB i CD. Odcinki CM i DM są wysokościami trójkątów równobocznych ABC i ABD, a więc ich długości są równe $\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b)$. Trójkąt CMD jest więc równoramienny, zatem jego środkowa MN jest jednocześnie jego wysokością i z twierdzenia Pitagorasa obliczymy, że $MN=\frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)$. Jeśli $a=b$, to wiemy już, że $PQ=MN=a\sqrt{2}$. Dalej przyjmijmy dla ustalenia uwagi, że $a>b$. Trójkąt MNQ jest prostokątny, a skoro $NQ=\frac{a-b}{2}$, to znów korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczymy, że

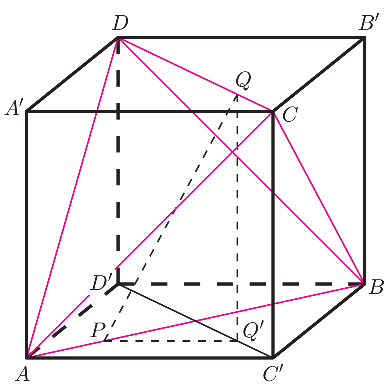
$$MQ^2=\frac{(a-b)^2}{4}+\frac{(a+b)^2}{2}.$$

Płaszczyzna CDM jest płaszczyzną symetralną odcinka AB, a więc jest do niego prostopadła. To samo dotyczy dowolnej prostej w niej zawartej, skąd wniosek, że $MQ\perp AB$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego PMQ dostajemy

$$PQ^2=MP^2+MQ^2=\frac{(a-b)^2}{4}+\frac{(a-b)^2}{4}+\frac{(a+b)^2}{2}=a^2+b^2,$$

skąd $PQ=\sqrt{a^2+b^2}$.

Rachunki dość uciążliwe, ale wynik podejrzanie ładny... Spróbujmy więc innego podejścia. Doświadczony uczestnik olimpiad, jak również Czytelnik Uważny, spojrzałby na to w następujący sposób.



Rys. 2

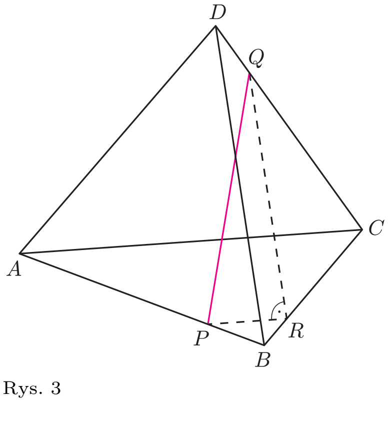
Sposób II – za pomocą wpisania czworościanu foremnego w sześcian

Na czworościanie $ABCD$ opiszmy sześcian $AC'BD'A'CB'D$. Długość jego krawędzi jest równa $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$. Niech Q' będzie takim punktem na odcinku $C'D'$, że $Q'C'=a$ i $Q'D'=b$. Wtedy odcinek QQ' jest prostopadły do podstawy $AC'BD'$, a jego długość jest równa długości krawędzi sześcianu, czyli $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$. Znowu, jeśli $a=b$, to punkt Q' pokrywa się z punktem P, a więc odcinek PQ pokrywa się z QQ' – stąd $PQ=\frac{a+b}{\sqrt{2}}=a\sqrt{2}$. W przeciwnym przypadku trójkąt $PQ'Q$ jest prostokątny. Korzystając np. z twierdzenia Talesa, możemy obliczyć, że $PQ'=\frac{a-b}{\sqrt{2}}$. Stosując teraz twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta $PQ'Q$, otrzymujemy

$$PQ^2=PQ'^2+QQ'^2=\frac{(a-b)^2}{2}+\frac{(a+b)^2}{2}=a^2+b^2$$

i znów $PQ=\sqrt{a^2+b^2}$.

Tym razem rachunki były krótsze, ale nadal trzeba coś obliczyć, a poza tym w obu rozwiązaniach obliczenia nie obejmują przypadku $a=b$. Pokażemy więc sposób, który daje wynik natychmiast i bez rozpatrywania dwóch przypadków.



Rys. 3

Sposób III – za pomocą... chytrego, niestandardowego pomysłu

Niech R będzie takim punktem leżącym na krawędzi BC, że $BR=b$ i $CR=a$. Trójkąty BPR i CQR są równoboczne, a stąd wynika, że $PR=b$ i $QR=a$. Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wnioskujemy, że $PR\parallel AC$ i $QR\parallel BD$. Ale krawędzie AC i BD czworościanu $ABCD$ są prostopadłe (dlaczego?), skąd wnioskujemy, że trójkąt PRQ jest prostokątny. Twierdzenie Pitagorasa daje więc wynik $PQ=\sqrt{a^2+b^2}$.

Michał KIEZA