Numerowanie

Joanna JASZUŃSKA

Na pierwszym etapie tegorocznej Olimpiady Matematycznej pojawiło się poniższe zadanie 1 o numerowaniu krawędzi dwunastościanu. Spośród licznych zadań o podobnej tematyce prezentujemy kilka o dość różnorodnych rozwiązaniach.

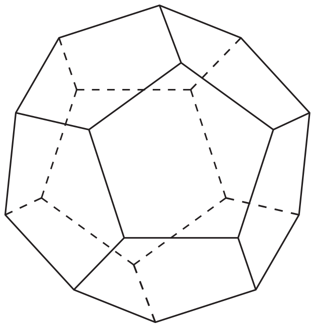
1. Krawędzie dwunastościanu foremnego (rys. 1) chcemy ponumerować liczbami $1, 2, \ldots, 30$, używając każdej z nich dokładnie raz. Rozstrzygnij, czy można to uczynić, tak aby suma numerów krawędzi wychodzących z dowolnego wierzchołka była:
(a) parzysta; (b) podzielna przez 4.

2. W wierzchołkach sześcianu napisano siedem zer i jedną jedynkę. Do każdej z liczb na końcach dowolnej krawędzi można dodać 1. Czy wykonując szereg takich operacji, można sprawić, by wszystkie liczby w wierzchołkach były
(a) równe? (b) podzielne przez 3?

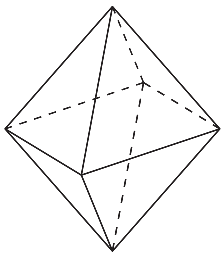
3. Rozstrzygnij, czy liczby $1, 2, 3, \ldots, 18$ można rozstawić w wierzchołkach i na środkach krawędzi ośmiościanu foremnego (rys. 2), tak aby każda liczba na krawędzi ośmiościanu była średnią arytmetyczną liczb na jej końcach.

4. Na każdej ścianie sześcianu zapisano dodatnią liczbę całkowitą, a w każdym wierzchołku iloczyn liczb występujących na trzech ścianach z danym wierzchołkiem. Suma wszystkich liczb zapisanych w wierzchołkach tego sześcianu jest równa 2009. Jaka jest suma liczb zapisanych na jego ścianach?

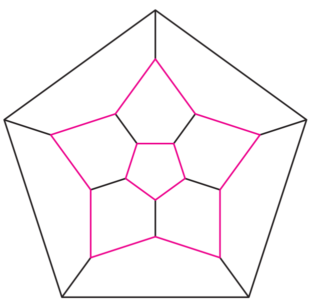
5. Każdemu wierzchołkowi sześcianu przyporządkowano liczbę 1 lub -1, a każdej ścianie — iloczyn liczb przyporządkowanych wierzchołkom tej ściany. Wyznacz zbiór wartości, które może przyjąć suma 14 liczb przyporządkowanych ścianom i wierzchołkom.



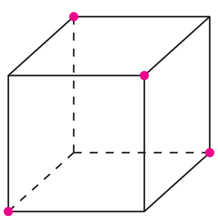
Rys. 1. Dwunastościan foremny: 12 ścian, 30 krawędzi i 20 wierzchołków.



Rys. 2. Ośmiościanu foremny: 8 ścian, 12 krawędzi i 6 wierzchołków.



Rys. 3. Dwunastościan widziany przez przednią ścianę.



Rys. 4

Rozwiązania

R1. (a) Można (rys. 3). Kolorem zaznaczono krawędzie o nieparzystych numerach.

(b) Nie można. Niech S oznacza sumę wszystkich numerów krawędzi:

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 30 = \frac{30 \cdot 31}{2}.$$

Niech a_i oznacza sumę numerów w i-tym wierzchołku ($i = 1, 2, \ldots, 20$). Wtedy $a_1 + a_2 + \ldots + a_{20} = 2S$, bo numer każdej krawędzi jest liczony dwukrotnie — przy każdym z jej końców. Gdyby każda z liczb a_i była podzielna przez 4, to $2S$ także. Jednak $2S = 30 \cdot 31$ nie dzieli się przez 4. $\square$

R2. (a) Nie. Opisana operacja zwiększa o 2 sumę wszystkich liczb. Początkowo suma ta jest równa 1, więc zawsze jest nieparzysta, czyli niepodzielna przez 8.

(b) Nie. Wyróżnijmy liczby w czterech wierzchołkach, jak na rysunku 4. Niech S oznacza ich sumę, a T — sumę pozostałych czterech liczb. Opisana operacja nie zmienia $S - T$. Początkowo $3 \nmid S - T$. Tymczasem gdyby $3|S$ i $3|T$, to $3|S - T$. $\square$

R3. Nie można. Liczby we wszystkich wierzchołkach muszą być tej samej parzystości, aby dla każdej krawędzi liczba umieszczona na jej środku była całkowita. Liczba 1 nie jest średnią arytmetyczną żadnych liczb większych od niej, zatem musi stać w wierzchołku, podobnie liczba 18. Nie są one jednak tej samej parzystości. $\square$

R4. Oznaczmy przez a_1 i a_2, b_1 i b_2 oraz c_1 i c_2 liczby zapisane na parach przeciwległych ścian sześcianu. Zauważmy, że w każdym wierzchołku występuje inny spośród ośmiu możliwych iloczynów $a_i b_j c_k$, gdzie $i, j, k \in \{1, 2\}$. Suma liczb w wierzchołkach jest więc sumą tych ośmiu iloczynów i można ją zapisać jako

$$(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)(c_1 + c_2) = 2009 = 7 \cdot 7 \cdot 41.$$

Liczby 7 i 41 są pierwsze, a sumy w nawiasach po lewej stronie większe od 1, więc

$$a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 = 7 + 7 + 41 = 55. \square$$

Wskazówka 5. Jak zmieni się wartość sumy, gdy zmienimy znak liczby w jednym z wierzchołków?

Zadania 3 i 4 pochodzą z broszury *Przed konkursem matematycznym* Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej (Wyd. Szkolne Omega, Kraków 2010). Zadanie 5 pochodzi z XLV Olimpiady Matematycznej.