Inwersja w przestrzeni i rzut stereograficzny – zadania

*Rozważmy sferę S o środku O i promieniu R. **Inwersją** względem sfery S nazywamy przekształcenie, które przekształca punkt A na punkt A^* leżący na półprostej $OA^{\rightarrow}$ taki, że $OA^* = \frac{R^2}{OA}$. Tutaj przez inwersję będziemy domyślnie rozumieć inwersję względem sfery. Tradycyjnie również przez A^* będziemy zawsze oznaczać obraz punktu A w inwersji (dotyczy to także innych obiektów niż punkty, np. prostych, płaszczyzn czy sfer). Punkt O jest też nazywany środkiem inwersji, zaś R jej promieniem.*

Własności inwersji

1. Udowodnić, że inwersja o środku w O przekształca

a) płaszczyznę przechodzącą przez punkt O na siebie samą,

b) płaszczyznę nieprzechodzącą przez punkt O na sferę przechodzącą przez punkt O,

c) sferę przechodzącą przez punkt O na płaszczyznę niezawierającą punktu O,

d) sferę niezawierającą punktu O na sferę niezawierającą punktu O.

2. Udowodnić, że inwersja o środku w O przekształca

a) prostą przechodzącą przez punkt O na siebie samą,

b) prostą nieprzechodzącą przez punkt O na okrąg przechodzący przez punkt O,

c) okrąg przechodzący przez punkt O na prostą niezawierającą punktu O,

d) okrąg niezawierający punktu O na okrąg niezawierający punktu O.

Kąt między dwoma przecinającymi się sferami (albo sferą i płaszczyzną) jest równy kątowi między płaszczyznami stycznymi do tych sfer (albo między płaszczyzną styczną i daną płaszczyzną) poprowadzonymi przez dowolny z punktów przecięcia.

Kąt między dowolnymi przecinającymi się okręgami w przestrzeni (albo między okręgiem i prostą) jest równy kątowi między prostymi stycznymi do tych okręgów (albo między prostą styczną i daną prostą) poprowadzonymi z punktów przecięcia.

3. Wykazać, że inwersja zachowuje kąty między przecinającymi się sferami (płaszczyznami).

4. Wykazać, że inwersja zachowuje kąty między przecinającymi się okręgami (prostymi).

5. Rozważmy inwersję o środku O i promieniu R. Dowieść, że $A^*B^* = \frac{AB \cdot R^2}{OA \cdot OB}$.

6. Dana jest sfera i punkt O na zewnątrz niej. Dowieść, że istnieje inwersja o środku O przekształcająca daną sferę na siebie.

7. Dana jest sfera i punkt O wewnątrz niej. Dowieść, że istnieje inwersja o środku O, która przekształca daną sferę na sferę symetryczną do niej względem punktu O.

8. Rozważmy inwersję o środku O przekształcającą pewną sferę S na sferę S^*. Wykazać, że O jest środkiem jednokładności przekształcającej sferę S na S^*.

9. Rozważmy inwersję o środku O oraz pewną sferę S o środku $S \neq O$. Wykazać, że środek obrazu sfery S przy danej inwersji leży na prostej OS.

Zadania na wykorzystanie inwersji

10. Wykazać, że kąt między okręgami opisanymi na dwóch dowolnych ścianach czworościanu jest równy kątowi między okręgami opisanymi na dwóch pozostałych.

11. W czworościanie $ABCD$ iloczyny długości przeciwległych krawędzi są równe. Obliczyć kąt między okręgami opisanymi na trójkątach ABD i BCD.

12. Okrąg S leży na pewnej sferze, zaś punkt P jest na zewnątrz niej. Prowadzimy proste przechodzące przez punkt P oraz wszystkie punkty okręgu S. Wykazać, że drugie punkty przecięcia owych prostych ze sferą leżą na okręgu.

13. Dana jest sfera oraz stożek o wierzchołku X opisany na niej, styczny do niej wzdłuż okręgu o środku C. Załóżmy, że punkt X porusza się po pewnej płaszczyźnie rozłącznej z daną sferą. Znaleźć miejsce geometryczne punktów C.

14. Wykazać, że dla dowolnego czworościanu istnieje trójkąt, którego boki są równe co do wartości iloczynom przeciwległych krawędzi tego czworościanu. Wykazać dodatkowo, że pole tego trójkąta jest równe $6VR$, gdzie V i R oznaczają odpowiednio obętość i promień sfery opisanej na czworościanie (wzór Crelle'a).

15. Wszystkie ściany pewnego wielościanu wypukłego o sześciu ścianach są czworokątami. Wykazać, że jeśli 7 wierzchołków tego wielościanu leży na jednej sferze, to ósmy również do niej należy.

16. (RUS 99) Przez wierzchołek A czworościanu $ABCD$ poprowadzono płaszczyznę styczną do sfery opisanej na tym czworościanie. Udowodnić, że proste, wdłuż których płaszczyzna ta przecina płaszczyzny ścian ABC, ACD, ABD, tworzą sześć równych kątów wtedy i tylko wtedy, gdy

$$AB \cdot CD = AC \cdot BD = AD \cdot BC.$$

17. Punkty K, L, M, N, O, P leżą odpowiednio na krawędziach AB, BC, CA, AD, BD, CD czworościanu $ABCD$. Wykazać, że sfery opisane na czworościanach $AKMN$, $BKLO$, $CLMP$, $DNOP$ mają wspólny punkt.

18. Dane są dwie sfery styczne do siebie i styczne do płaszczyzny π odpowiednio w punktach P i Q. Przez punkt R antypodyczny od P (czyli symetryczny do P względem środka sfery) poprowadzono płaszczyznę styczną do drugiej sfery w punkcie S. Dowieść, że $PR = RS$.

19. Dany jest czworościan $ABCD$. Sfera przechodząca przez punkty A, B i C przecina krawędzie AD, BD, CD odpowiednio w punktach A', B', C'. Dowieść, że prosta przechodząca przez punkt D i prostopadła do płaszczyzny $A'B'C'$ przechodzi również przez środek sfery opisanej na czworościanie $ABCD$.

20. (Klub 44M, 592) Punkt P leży wewnątrz czworościanu $ABCD$. Proste AP, BP, CP, DP przecinają sfery opisane na czworościanach $PBCD$, $PCDA$, $PDAB$, $PABC$ odpowiednio w punktach K, L, M, N (różnych od P). Udowodnić, że

$$\frac{AP}{AK} \cdot \frac{BP}{BL} \cdot \frac{CP}{CM} \cdot \frac{DP}{DN} \leqslant \frac{1}{256}.$$

21. (OM 60-III-5) Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do jego ścian BCD, ACD, ABD, ABC odpowiednio w punktach P, Q, R, S. Odcinek PT jest średnicą tej sfery, zaś punkty A', Q', R', S' są punktami przecięcia prostych TA, TQ, TR, TS z płaszczyzną BCD. Wykazać, że A' jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $Q'R'S'$.

22. Punkt M leży wewnątrz czworościanu $ABCD$. Płaszczyzna styczna w punkcie M do sfery opisanej na czworościanie $ABCM$ przecina się z płaszczyzną ABC wzdłuż prostej ℓ_D. Analogicznie określamy proste ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C. Dowieść, że wszystkie te cztery proste leżą na jednej płaszczyźnie.

23. Dane są cztery sfery parami styczne w sześciu różnych punktach. Wykazać, że te sześć punktów leży na jednej sferze.

24. Dana są cztery sfery S_1, S_2, S_3, S_4. Sfery S_1 i S_2 są styczne zewnętrznie w punkcie A_1, S_2 i S_3 – w punkcie A_2, S_3 i S_4 – w punkcie A_3, S_4 i S_1 – w punkcie A_4. Wykazać, że punkty A_1, A_2, A_3 i A_4 leżą na jednym okręgu.

25. W przestrzeni danych jest n sfer – każda jest styczna do każdej z pozostałych oraz żadne trzy nie są styczne w jednym punkcie. Udowodnić, że $n \leqslant 5$.

26. (Hexlet Soddy'ego) Dane są trzy parami styczne sfery C_1, C_2, C_3. Rozważamy łańcuch sfer S_1, S_2, $\ldots$, S_n taki, że każda sfera S_i jest styczna do C_1, C_2, C_3 oraz do sfer S_{i-1} i S_{i+1}. Wykazać, że jeśli wszystkie punkty styczności są różne oraz $n > 2$, to $n = 6$.

27. Dane są cztery parami styczne zewnętrznie sfery, których środki leżą na jednej płaszczyźnie π. Sfera S jest styczna do każdej z tych sfer. Wykazać, że stosunek promienia sfery S do odległości jej środka od płaszczyzny π jest równy $1 : \sqrt{3}$.

Rzut stereograficzny

Dana jest płaszczyzna π styczna do sfery S w punkcie A oraz średnica AB tej sfery. *Rzutem stereograficznym* nazywamy przekształcenie, które każdemu punktowi X leżącemu na sferze S przyporządkowuje punkt Y, w którym prosta BX przecina płaszczyznę π.

28. Udowodnić, że

a) rzut stereograficzny pokrywa się z pewną inwersją w przestrzeni obciętą do sfery S,

b) rzut stereograficzny przekształca okrąg na sferze niezawierający punktu B na okrąg na płaszczyźnie π,

c) w rzucie stereograficznym przeciwobrazem okręgu na płaszczyźnie π jest okrąg na sferze,

d) rzut stereograficzny zachowuje kąty między okręgami.

29. W przestrzeni dany jest okrąg S i punkt B. Niech A będzie rzutem prostokątnym punktu B na płaszczyznę zawierającą S. Dla każdego punktu $D \in S$ rozważamy punkt M_D – rzut prostokątny punktu A na prostą BD. Wykazać, że wszystkie punkty M_D leżą na okręgu

30. (Zwardoń 2007) Rozstrzygnąć, czy istnieje taki skończony zbiór okręgów na płaszczyźnie o parami rozłącznych wnętrzach, że każdy z danych okręgów jest styczny do dokładnie pięciu spośród pozostałych okręgów.

Rozwiązania

Własności inwersji

1. *Udowodnić, że inwersja o środku w O przekształca*

a) płaszczyznę przechodzącą przez punkt O na siebie samą,

b) płaszczyznę nieprzechodzącą przez punkt O na sferę przechodzącą przez punkt O,

c) sferę przechodzącą przez punkt O na płaszczyznę niezawierającą punktu O,

d) sferę niezawierającą punktu O na sferę niezawierającą punktu O.

Rozwiązanie. a) Jeśli punkt X leży na tej płaszczyźnie, to półprosta $OX^{\rightarrow}$ również. W takim razie obraz punktu X leżący na półprostej $OX^{\rightarrow}$ także musi należeć do tej płaszczyzny (jasne też, że każdy punkt otrzymanej płaszczyzny ma swój przeciwobraz).

b) Niech A będzie rzutem prostokątnym punktu O na daną płaszczyznę π. Wykażemy najpierw, że każdy punkt X leżący na płaszczyźnie π przechodzi na punkt leżący na sferze o średnicy OA^*. Z definicji inwersji wnosimy, że

$$\frac{OA^*}{OX^*} = \frac{OX}{OA}.$$

Ponadto $\angle A^*OX^* = \angle AOX$, bowiem półproste łączące punkty ze środkiem się nie zmieniają. W takim razie trójkąty OX^*A^* i OAX są podobne. Stąd $\angle OX^*A^* = \angle OAX = 90^\circ$.

Pozostaje jeszcze zauważyć, że każdy punkt $Y \neq O$ otrzymanej sfery jest obrazem pewnego punktu płaszczyzny π – mianowicie punktu przecięcia prostej OY z tą płaszczyzną.

c) Tezę otrzymujemy natychmiast z poprzedniego punktu i obserwacji, że inwersja jest przekształceniem odwrotnym do samej siebie.

d) Niech prosta łącząca punkt O ze środkiem sfery przecina tę sferę w punktach A i B. Przyjmijmy, że punkt A leży wewnątrz odcinka OB (przypadki, gdy B leży wewnątrz odcinka OA oraz O leży wewnątrz odcinka AB są analogiczne i ich przeanalizowanie pozostawiamy Czytelnikowi). Wówczas punkt B^* leży wewnątrz odcinka OA^*.

Niech X będzie dowolnym punktem sfery o średnicy AB. Podobnie jak w punkcie b) stwierdzamy, że trójkąty OAX i OX^*A^* są podobne oraz trójkąty OBX i OX^*B^* są podobne. Stąd

$$\angle A^*X^*B^* = 180^\circ - \angle X^*B^*A^* - \angle X^*A^*B^* = 180^\circ - \angle X^*XB - \angle OXA = \angle AXB = 90^\circ$$

(powyższy rachunek nieznacznie może się zmienić w innych przypadkach). Zatem obraz dowolnego punktu X leżącego na sferze o średnicy AB leży na sferze o średnicy A^*B^*. Przeprowadzając to samo rozumowanie w drugą stronę stwierdzimy, że dla każdego punktu należącego do drugiej sfery jego przeciwobraz leży na pierwszej z tych sfer.

2. *Udowodnić, że inwersja o środku w O przekształca*

a) prostą przechodzącą przez punkt O na siebie samą,

b) prostą nieprzechodzącą przez punkt O na okrąg przechodzący przez punkt O,

c) okrąg przechodzący przez punkt O na prostą niezawierającą punktu O,

d) okrąg niezawierający punktu O na okrąg niezawierający punktu O.

Rozwiązanie. a) Jeśli punkt X leży na tej prostej, to półprosta $OX^{\rightarrow}$ również. W takim razie obraz punktu X leżący na półprostej $OX^{\rightarrow}$ także musi należeć do tej prostej (jasne też, że każdy punkt otrzymanej prostej ma swój przeciwobraz).

b) Możemy przeprowadzić podobne rozumowanie, jak w poprzednim zadaniu, ale można też inaczej. Mianowicie daną prostą możemy przedstawić jako część wspólną płaszczyzny π_O zawierającej punkt O oraz pewnej płaszczyzny π niezawierajacej punktu O. Teraz wystarczy zauważyć, że płaszczyzna π_O przechodzi na siebie, zaś płaszczyzna π na sferę przechodzącą przez punkt O. Ich część wspólna jest okręgiem przechodzącym przez punkt O, zaś z drugiej strony jest to obraz inwersyjny danej w treści zadania prostej.

c) Tezę otrzymujemy natychmiast z poprzedniego punktu i obserwacji, że inwersja jest przekształceniem odwrotnym do samej siebie.

d) Znów można przeprowadzić identyczne rozumowanie jak w poprzednim zadaniu, które działa zarówno w przestrzeni jak i na płaszczyźnie. Można także zauważyć, że okrąg rozłączny z punktem O jest częścią wspólną pewnych dwóch sfer niezawierających punktu O. Ich obrazy są pewnymi dwoma sferami, które także nie zawierają punktu O. Ich część wspólna jest okręgiem i zarazem obrazem inwersyjnym danego w treści zadania okręgu.

3. *Wykazać, że inwersja zachowuje kąty między przecinającymi się sferami (płaszczyznami).*

Rozwiązanie. Rozpocznijmy od obserwacji, że inwersja przeprowadza dwie styczne do siebie sfery (albo sferę styczną do płaszczyzny) na dwie sfery do siebie styczne, sferę styczną do płaszczyzny albo na dwie płaszczyzny równoległe. Istotnie, jeśli środek inwersji jest różny od punktu styczności tych obiektów, to dana obserwacja jest prawdziwa na mocy różnowartościowości inwersji. Jeśli natomiast pokrywa się z punktem styczności, to obrazem są dwie równoległe płaszczyzny.

Oznaczmy dane dwie sfery przez S_1 i S_2, zaś płaszczyzny do nich styczne (w dowolnym ich wspólnym punkcie, różnym od środka inwersji, jeśli należy on do obu sfer) odpowiednio przez π_1 i π_2. Płaszczyzny te przejdą na dwie sfery π_1^* i π_2^*, które będą styczne odpowiednio do S_1^* i S_2^*. Niech α_1 będzie wspólną płaszczyzną styczną sfer π_1^* i S_1^*, zaś α_2 – wspólną płaszczyzną styczną sfer π_2^* i S_2^*. Wystarczy, jeśli wykażemy, że kąt między płaszczyznami α_1 i α_2 jest równy kątowi między płaszczyznami π_1 i π_2. Jednakże, skoro sfera π_1^* jest styczna do płaszczyzny α_1, to $\pi_1 || \alpha_1$. Podobnie stwierdzamy, że $\pi_2 || \alpha_2$ – a to kończy dowód.

4. *Wykazać, że inwersja zachowuje kąty między przecinającymi się okręgami (prostymi).*

Rozwiązanie. Dowód jest podobny, jak w poprzednim zadaniu i pozostawiamy go Czytelnikowi.

5. *Rozważmy inwersję o środku O i promieniu R. Dowieść, że* $A^*B^* = \frac{AB \cdot R^2}{OA \cdot OB}$.

Rozwiązanie. Trójkąty OAB i OB^*A^* są podobne, skąd wniosek, że

$$\frac{A^*B^*}{AB} = \frac{OA^*}{OB} = \frac{OA \cdot OA^*}{OA \cdot OB} = \frac{R^2}{OA \cdot OB}.$$

6. *Dana jest sfera i punkt O na zewnątrz niej. Dowieść, że istnieje inwersja o środku O przekształcająca daną sferę na siebie.*

Rozwiązanie. Przyjmijmy, że pewna prosta przechodząca przez punkt O przecina sferę w punktach X i Y. Rozważmy inwersję o promieniu $R^2 = OX \cdot OY$. Inwersja ta zamienia punkty X i Y miejascami. Niech teraz dowolna prosta przechodząca przez punkt O przecina daną sferę w punktach X' i Y'. Wtedy $OX' \cdot OY' = OX \cdot OY = R^2$, skąd wnosimy, że punkt Y' jest obrazem punktu X' i odwrotnie. Ponadto jeśli prosta przechodząca przez O jest styczna do sfery w punkcie Z, to $OZ^2 = OX \cdot OY = R^2$. W takim razie punkt Z przechodzi na siebie. Ostatecznie dostajemy, że dana sfera przechodzi na siebie.

7. *Dana jest sfera i punkt O wewnątrz niej. Dowieść, że istnieje inwersja o środku O, która przekształca daną sferę na sferę symetryczną do niej względem punktu O.*

Rozwiązanie. Dowód jest podobny jak w poprzednim zadaniu.

8. *Rozważmy inwersję o środku O przekształcającą pewną sferę S na sferę S^*. Wykazać, że O jest środkiem jednokładności przekształcającej sferę S na S^*.*

Rozwiązanie. Niech A_1 będzie dowolnym punktem leżącym na sferze S, zaś A_2 będzie drugim punktem przecięcia półprostej $OA_1^{\rightarrow}$ z tą sferą (jeśli ta półprosta jest styczna to $A_2 = A_1$). Jest jasne, że iloczyn $OA_1 \cdot OA_2 = d^2$ nie zależy od wyboru punktu A_1. Niech R będzie promieniem danej inwersji. Wówczas

$$OA_2^* = \frac{R^2}{OA_2} = \frac{R^2}{d^2} \cdot OA_1.$$

Stąd wniosek, że A_2^* jest obrazem punktu A_1 w jednokładności o środku O i skali $\pm R^2/d$ (w zależności od tego, czy O leży wewnątrz czy na zewnątrz sfery S). Podobnie A_1^* jest obrazem punktu A_2 w tej samej jednokładności. Widzimy zatem, że opisana jednokładność przekształca każdy punkt sfery S na odpowiedni punkt sfery S^*.

9. *Rozważmy inwersję o środku O oraz pewną sferę S o środku $S \neq O$. Wykazać, że środek obrazu sfery S przy danej inwersji leży na prostej OS.*

Rozwiązanie. Na mocy poprzedniego zadania sfera S i jej obraz inwersyjny są jednokładne względem punktu O – ich środki muszą być wraz z O współliniowe.

Uwaga. Środek sfery w inwersji zazwyczaj nie przechodzi na środek obrazu tej sfery.

Zadania na wykorzystanie inwersji

10. *Wykazać, że kąt między okręgami opisanymi na dwóch dowolnych ścianach czworościanu jest równy kątowi między okręgami opisanymi na dwóch pozostałych.*

Rozwiązanie. Załóżmy, że mamy dany czworościan $ABCD$. Mamy wykazać, że kąt między okręgami opisanymi na trójkącie ABC i ABD jest równy kątowi między okręgami opisanymi na trójkącie BCD i CDA.

Zastosujmy inwersję o środku D. Okrąg opisany na trójkącie ABC przejdzie na okrąg opisany na trójkącie $A^*B^*C^*$, zaś okrąg opisany na trójkącie ABD przejdzie na prostą A^*B^*. Okręgi opisane na trójkątach BCD i CDA przejdą zaś odpowiednio na proste B^*C^* i C^*A^*.

Ponieważ inwersja zachowuje kąty, to wystarczy dowieść, że kąt między styczną w punkcie A^* do okręgu opisanego na trójkącie $A^*B^*C^*$ a cięciwą A^*B^* jest równy kątowi $A^*C^*B^*$. To jednak wynika z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą.

11. *W czworościanie $ABCD$ iloczyny długości przeciwległych krawędzi są równe. Obliczyć kąt między okręgami opisanymi na trójkątach ABD i BCD.*

Rozwiązanie. Rozważmy inwersję o środku D i promieniu $\sqrt{AD \cdot BD \cdot CD}$. Okręgi opisane na trójkątach ABD i BCD przejdą odpowiednio na proste A^*B^* i B^*C^*. Ponieważ inwersja zachowuje kąty, to wystarczy obliczyć kąt $A^*B^*C^*$.

Z drugiej strony mamy

$$A^*B^* = \frac{AB \cdot AD \cdot BD \cdot CD}{AD \cdot BD} = AB \cdot CD.$$

Podobnie obliczymy, że

$$B^*C^* = BC \cdot AD \quad \text{oraz} \quad C^*A^* = CA \cdot BD.$$

W takim razie z założeń danych w treści zadania wynika, że trójkąt $A^*B^*C^*$ jest równoboczny, skąd w szczególności $\angle A^*B^*C^* = 60^\circ$. Tym samym poszukiwany w zadaniu kąt między okręgami opisanymi na trójkątach ABD i BCD wynosi 60°.

12. *Okrąg S leży na pewnej sferze, zaś punkt P jest na zewnątrz niej. Prowadzimy proste przechodzące przez punkt P oraz wszystkie punkty okręgu S. Wykazać, że drugie punkty przecięcia owych prostych ze sferą leżą na okręgu.*

Rozwiązanie. Weźmy dowolny punkt X na okręgu S oraz niech X' będzie drugim punktem przecięcia się prostej PX z daną sferą. Iloczyn $PX \cdot PX'$ nie zależy od wyboru punktu X (twierdzenie o potędze punktu dla sfery). Wynika stąd, że drugie punkty przecięcia ze sferą prostych rozważanych w zadaniu są obrazami punktów ich przecięcia z okręgiem S w inwersji o środku P i promieniu $\sqrt{PX \cdot PX'}$. Jednakże obrazem okręgu S w inwersji jest okrąg (bowiem S nie zawiera środka inwersji).

13. *Dana jest sfera oraz stożek o wierzchołku X opisany na niej, styczny do niej wzdłuż okręgu o środku C. Załóżmy, że punkt X porusza się po pewnej płaszczyźnie rozłącznej z daną sferą. Znaleźć miejsce geometryczne punktów C.*

Rozwiązanie. Oznaczmy przez O środek danej sfery, zaś P niech będzie dowolnym punktem z okręgu o środku C. Wtedy trójkąty XPO i PCO są trójkątami prostokątnymi podobnymi, skąd wniosek, że

$$OP^2 = OC \cdot OX.$$

W takim razie punkt C jest obrazem punktu X w inwersji względem danej w treści zadania sfery. Miejscem geometrycznym punktów C jest obraz płaszczyzny w tej inwersji, a więc pewna sfera przechodząca przez punkt O. Jeśli M jest najbliższym punktowi O punktem należącym do płaszczyzny, po której porusza się punkt X, to obrazem danej płaszczyzny jest sfera o średnicy OM^*, gdzie M^* leży na półprostej $OM^{\rightarrow}$ i $OM^* = OP^2/OM$.

14. *Wykazać, że dla dowolnego czworościanu istnieje trójkąt, którego boki są równe co do wartości iloczynom przeciwległych krawędzi tego czworościanu. Wykazać dodatkowo, że pole tego trójkąta jest równe $6VR$, gdzie V i R oznaczają odpowiednio obętość i promień sfery opisanej na czworościanie (wzór Crelle'a).*

Rozwiązanie. Dla danego czworościanu $ABCD$ rozważmy inwersję o środku D i promieniu $r = \sqrt{AD \cdot BD \cdot CD}$. Obrazem trójkąta ABC jest trójkąt $A^*B^*C^*$, w którym

$$A^*B^* = \frac{AB \cdot AD \cdot BD \cdot CD}{AD \cdot BD} = AB \cdot CD$$

oraz

$$B^*C^* = BC \cdot AD, \quad A^*C^* = AC \cdot BD.$$

Trójkąt $A^*B^*C^*$ jest więc tym, o który chodzi.

Zajmijmy się teraz drugą częścią zadania. Sfera opisana na czworościanie $ABCD$ przechodzi na płaszczyznę $A^*B^*C^*$. Stąd wniosek, że odległość punktu D od płaszczyzny $A^*B^*C^*$ jest równa $r^2/2R$. W takim razie objętość czworościanu $A^*B^*C^*D$ jest równa

$$\frac{1}{3} \cdot [A^*B^*C^*] \cdot \frac{r^2}{2R}.$$

Z drugiej strony stosunek objętości czworościanów $A^*B^*C^*D$ i $ABCD$ jest równy

$$\frac{A^*D}{AD} \cdot \frac{B^*D}{BD} \cdot \frac{C^*D}{CD} = \frac{r^2}{AD^2} \cdot \frac{r^2}{BD^2} \cdot \frac{r^2}{CD^2} = r^2.$$

Zatem

$$\frac{1}{3} \cdot [A^*B^*C^*] \cdot \frac{r^2}{2R} = r^2 \cdot V,$$

skąd

$$[A^*B^*C^*] = 6VR.$$

15. *Wszystkie ściany pewnego wielościanu wypukłego o sześciu ścianach są czworokątami. Wykazać, że jeśli 7 wierzchołków tego wielościanu leży na jednej sferze, to ósmy również do niej należy.*

Rozwiązanie. Niech $ABCDA_1B_1C_1D_1$ będzie danym w zadaniu wielościanem. Załóżmy, że C_1 jest jedynym wierzchołkiem, o którym nie wiemy, czy leży na danej sferze. Rozważmy inwersję o środku A. Obrazem danej w zadaniu sfery jest płaszczyzna $B^*D^*A_1^*$ zawierająca także punkty C^*, D_1^* i B_1^* leżące odpowiednio na bokach B^*D^*, $D^*A_1^*$, $A_1^*B^*$ trójkąta $B^*D^*A_1^*$ (bowiem okręgi opisane na czworokątach $ABCD$, ABB_1A_1 i AA_1D_1D przechodzą na proste zawierające odpowiednie boki trójkąta).

Punkt C_1 jest punktem przecięcia płaszczyzn $A_1B_1D_1$, CD_1D i BB_1C. Wynika stąd, że jego obraz C_1^* jest punktem przecięcia ich obrazów, czyli sfer opisanych na czworościanach $AA_1^*B_1^*D_1^*$, $AC^*D_1^*D^*$ i $AB^*B_1^*C^*$ (oczywiście te sfery mają dwa punkty przecięcia, a jednym z nich jest środek inwersji A). Aby wykazać, że punkt C_1 leży na danej w zadaniu sferze, wystarczy dowieść, że jego obraz leży na płaszczyźnie $B^*D^*A_1^*$ albo po prostu, że okręgi opisane na trójkątach $A_1^*B_1^*D_1^*$, $C^*D^*D_1^*$ i $B^*C^*B_1^*$ mają punkt wspólny. To jednak wynika z łatwego rachunku na kątach.

16. (RUS 99) *Przez wierzchołek A czworościanu $ABCD$ poprowadzono płaszczyznę styczną do sfery opisanej na tym czworościanie. Udowodnić, że proste, wzdłuż których płaszczyzna ta przecina płaszczyzny ścian ABC, ACD, ABD, tworzą sześć równych kątów wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$AB \cdot CD = AC \cdot BD = AD \cdot BC.$$

Rozwiązanie. Rozważmy inwersję o środku A i promieniu $\sqrt{AB \cdot AC \cdot AD}$. Obrazem sfery opisanej na czworościanie $ABCD$ jest płaszczyzna $B^*C^*D^*$. Stąd wynika, że obrazem płaszczyzny stycznej do tej sfery w punkcie A musi być płaszczyzna przechodząca przez A i równoległa do płaszczyzny $B^*C^*D^*$. Zarówno płaszczyzny ścian ABC, ACD, ABD jak i rozważane proste przechodzą na siebie (bowiem zawierają punkt A). Obrazy tych prostych leżą w płaszczyźnie równoległej do $B^*C^*D^*$, skąd wniosek, że są równoległe do odpowiednich boków trójkąta $B^*C^*D^*$. Ponieważ inwersja zachowuje kąty między prostymi, to teza jest równoważna temu, że trójkąt $B^*C^*D^*$ jest równoboczny.

Jednakże

$$B^*C^* = \frac{BC \cdot AB \cdot AC \cdot AD}{AB \cdot AC} = BC \cdot AD$$

i podobnie

$$C^*D^* = CD \cdot AB \quad \text{oraz} \quad D^*B^* = DB \cdot AC.$$

To zaś oznacza, że zależność $B^*C^* = C^*D^* = D^*B^*$ jest równoważna tezie zadania.

17. *Punkty K, L, M, N, O, P leżą odpowiednio na krawędziach AB, BC, CA, AD, BD, CD czworościanu $ABCD$. Wykazać, że sfery opisane na czworościanach $AKMN$, $BKLO$, $CLMP$, $DNOP$ mają wspólny punkt.*

Rozwiązanie. Będziemy używać następującej wersji płaskiej danego zadania:

Punkty X_1, Y_1, Z_1 leżą odpowiednio na bokach YZ, ZX, XY trójkąta XYZ. Wtedy okręgi opisane na trójkątach XY_1Z_1, YX_1Z_1, ZX_1Y_1 mają wspólny punkt.

Łatwy dowód poprzez rachunek na kątach pozostawiamy Czytelnikom.

Częściami wspólnymi sfer opisanych na czworościanach $AKMN$, $BKLO$ i $DNOP$ z płaszczyzną ABD są okręgi opisane na trójkątach AKN, BKO, DNO. Na mocy wersji płaskiej wspomnianej na początku mają one wspólny punkt C_1 (a więc należy on do sfer opisanych na czworościanach $AKMN$, $BKLO$). Analogicznie sfery opisane na czworościanach $BKLO$ i $CLMP$ mają punkt wspólny A_1 należący do okręgu opisanego na trójkącie DOP. Podobnie sfery opisane na czworościanach $CLMP$ i $AKNM$ mają punkt wspólny B_1 należący do okręgu opisanego na trójkącie DNP. Odnotujmy także, że punkty C_1, A_1 i B_1 leżą odpowiednio na łukach NO, OP i PN niezawierających punktu D.

Zauważmy teraz, że część wspólna sfer opisanych na czworościanach $AKMN$ i $DNOP$ jest okręgiem przechodzącym przez punkty N, C_1, B_1. Część wspólna sfer opisanych na czworościanach $BKLO$ i $DNOP$ jest okręgiem przechodzącym przez punkty O, C_1, A_1, zaś część wspólna sfer opisanych na czworościanach $CLMP$ i $DNOP$ jest okręgiem przechodzącym przez punkty P, A_1, B_1. Wykażemy, że te okręgi mają punkt wspólny, co oczywiście dowiedzie tezy zadania.

Rozważmy inwersję o środku D. Obrazem okręgów opisanych na trójkątach DNO, DOP i DNP są odpowiednio proste N^*O^*, O^*P^* i P^*N^* zawierające odpowiednio punkty C_1^*, A_1^* i B_1^* (ponadto te punkty leżą odpowiednio na odcinkach N^*O^*, O^*P^* i P^*N^*). Okręgi, które były częściami wspólnymi odpowiednich sfer, przejdą odpowiednio na okręgi opisane na trójkątach $N^*C_1^*B_1^*$, $O^*C_1^*A_1^*$ i $P^*A_1^*B_1^*$. Na mocy płaskiej wersji zadania mają one punkt wspólny. Jego przeciwobraz jest więc punktem wspólnym okręgów będących częściami wspólnymi rozważanych w zadaniu sfer.

18. *Dane są dwie sfery styczne do siebie i styczne do płaszczyzny π odpowiednio w punktach P i Q. Przez punkt R antypodyczny od P (czyli symetryczny do P względem środka sfery) poprowadzono płaszczyznę styczną do drugiej sfery w punkcie S. Dowieść, że $PR = RS$.*

Rozwiązanie. Niech A będzie środkiem sfery o średnicy RP, B – środkiem drugiej sfery, zaś C punktem ich styczności. Jednokładność o środku C przekształcająca jedną sferę na drugą przekształca punkt R na Q, skąd wniosek, że prosta QR zawiera punkt C.

Inwersja o środku R i promieniu RP przekształca sferę o średnicy PR na płaszczyznę π i na odwrót. W szczególności obrazem punktu C jest punkt Q. W takim razie sfera o środku B musi przejść na siebie. Stąd wniosek, że długość odcinka stycznego do niej poprowadzonego ze środka inwersji musi być równa promieniowi tej inwersji. Zatem $PR = RS$.

19. *Dany jest czworościan $ABCD$. Sfera przechodząca przez punkty A, B i C przecina krawędzie AD, BD, CD odpowiednio w punktach A', B', C'. Dowieść, że prosta przechodząca przez punkt D i prostopadła do płaszczyzny $A'B'C'$ przechodzi również przez środek sfery opisanej na czworościanie $ABCD$.*

Rozwiązanie. Sposób I. Zauważmy, że

$$DA \cdot DA' = DB \cdot DB' = DC \cdot DC' = r^2.$$

Rozważmy inwersję o środku D i promieniu r. Prosta rozważana w tezie zadania przechodzi na siebie, zaś płaszczyzna $A'B'C'$ na sferę opisaną na czworościanie $ABCD$. Stąd wniosek, że ta prosta jest prostopadła do sfery opisanej na $ABCD$. W takim razie musi zawierać jej środek.

Sposób II. Wystarczy, jeśli pokażemy, że prosta ℓ przechodząca przez punkt D i środek sfery opisanej na czworościanie $ABCD$ jest prostopadła do płaszczyzny $A'B'C'$.

Wykażemy, że owa prosta jest prostopadła do $A'B'$. Rozważmy rzut prostokątny k tej prostej na płaszczyznę ABD – przechodzi on przez środek okręgu opisanego na trójkącie ABD. A skoro trójkąty ABD i $B'A'D$ są podobne, to prosta k jest prostopadła do $A'B'$ (łatwy rachunek na kątach). W takim razie także $\ell \perp A'B'$. Podobnie dowodzimy, że $\ell \perp B'C'$, skąd dostajemy tezę.

20. (Klub 44M, 592) *Punkt P leży wewnątrz czworościanu $ABCD$. Proste AP, BP, CP, DP przecinają sfery opisane na czworościanach $PBCD$, $PCDA$, $PDAB$, $PABC$ odpowiednio w punktach K, L, M, N (różnych od P). Udowodnić, że*

$$\frac{AP}{AK} \cdot \frac{BP}{BL} \cdot \frac{CP}{CM} \cdot \frac{DP}{DN} \leqslant \frac{1}{256}.$$

Rozwiązanie. Odnotujmy na początek, że warto sobie rozważyć analogiczne zadanie na płaszczyźnie.

Rozważmy inwersję o środku P. Jeśli A^*, B^*, C^*, D^* są obrazami punktów A, B, C, D, to P leży wewnątrz czworościanu $A^*B^*C^*D^*$.

Objętości czworościanów $PB^*C^*D^*$, $PC^*D^*A^*$, $PD^*A^*B^*$, $PA^*B^*C^*$ oznaczmy odpowiednio przez V_a, V_b, V_c, V_d; ich suma jest równa objętości V czworościanu $A^*B^*C^*D^*$.

Obrazem sfery opisanej na czworościanie $PBCD$ jest płaszczyzna przechodząca przez punkty B^*, C^*, D^*. Skoro punkt K leżał na tej sferze, to jego obraz K^* musi należeć do płaszczyzny $B^*C^*D^*$. Wówczas mamy

$$\frac{PA^*}{PK^*} = \frac{KA^*}{PK^*} - 1 = \frac{V}{V_a} - 1.$$

Z własności inwersji dostajemy

$$PK \cdot PK^* = PA \cdot PA^*.$$

Zatem

$$\frac{AK}{AP} = 1 + \frac{PK}{PA} = 1 + \frac{PA^*}{PK^*} = \frac{V}{V_a},$$

a więc

$$\frac{AP}{AK} = \frac{V_a}{V}.$$

Analogicznie dowodzimy, że

$$\frac{BP}{BL} = \frac{V_b}{V}, \quad \frac{CP}{CM} = \frac{V_c}{V}, \quad \frac{DP}{DN} = \frac{V_d}{V}.$$

Suma tych czterech stosunków jest równa 1, więc teza wynika teraz z nierówności między średnimi.

21. (OM 60-III-5) *Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do jego ścian BCD, ACD, ABD, ABC odpowiednio w punktach P, Q, R, S. Odcinek PT jest średnicą tej sfery, zaś punkty A', Q', R', S' są punktami przecięcia prostych TA, TQ, TR, TS z płaszczyzną BCD. Wykazać, że A' jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $Q'R'S'$.*

Rozwiązanie. Rozważmy inwersję o środku T i promieniu TP. Zauważmy, że $\angle TPQ' = 90°$ oraz $\angle TQP = 90°$. Zatem trójkąty TQP i TPQ' są trójkątami prostokątnymi podobnymi. Stąd wniosek, że $TP^2 = TQ \cdot TQ'$, zatem punkt Q' jest obrazem punktu Q w tej inwersji. Podobnie stwierdzamy, że punkty R' i S' są obrazami odpowiednio punktów R i S. Obrazem sfery wpisanej zaś w tej inwersji jest płaszczyzna BCD, na której leżą punkty Q', R' i S'.

Z drugiej strony sfera o środku A przechodząca przez punkty Q, R, S jest prostopadła do sfery wpisanej w czworościan $ABCD$. Zatem jej obraz będzie sferą S przechodzącą przez punkty Q', R', S' prostopadłą do płaszczyzny BCD. W szczególności środek sfery S należy do płaszczyzny BCD. Z drugiej strony środek tej sfery musi leżeć na prostej AT. To zaś oznacza, że pokrywa się on z punktem A' – innymi słowy $A'Q' = A'R' = A'S'$.

22. *Punkt M leży wewnątrz czworościanu $ABCD$. Płaszczyzna styczna w punkcie M do sfery opisanej na czworościanie $ABCM$ przecina się z płaszczyzną ABC wzdłuż prostej ℓ_D. Analogicznie określamy proste ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C. Dowieść, że wszystkie te cztery proste leżą na jednej płaszczyźnie.*

Rozwiązanie. Inwersja o środku M przekształca płaszczyzny ścian czworościanu $ABCD$ na cztery sfery przechodzące przez punkt M, zaś płaszczyzny styczne do czterech rozważanych w zadaniu sfer na siebie. Obrazem prostej ℓ_D jest okrąg przechodzący przez punkt M leżący na sferze opisanej na czworościanie $A^*B^*C^*M$ oraz na płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny $A^*B^*C^*$. Wynika stąd, że prosta przechodząca przez środek tego okręgu przechodzi też przez środek okręgu opisanego na trójkącie $A^*B^*C^*$, a więc także przez środek sfery opisanej na czworościanie $A^*B^*C^*D^*$.

Analogicznie dowodzimy, że obrazami prostych ℓ_A, ℓ_B i ℓ_C są okręgi przechodzące przez M i takie, że proste przechodzące przez ich środki, prostopadłe do odpowiednich ścian, przechodzą przez środek sfery opisanej na czworościanie $A^*B^*C^*D^*$. Ponieważ te okręgi mają punkt wspólny M, to leżą na jednej sferze o środku w środku sfery opisanej na czworościanie $A^*B^*C^*D^*$ i przechodzącej przez M. W takim razie przeciwobrazy tych okręgów (czyli proste ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C i ℓ_D) leżą na jednej płaszczyźnie.

23. *Dane są cztery sfery parami styczne w sześciu różnych punktach. Wykazać, że te sześć punktów leży na jednej sferze.*

Rozwiązanie. Oznaczmy dane sfery przez S_1, S_2, S_3, S_4. Rozważmy inwersję o środku w punkcie P styczności S_1 i S_2. Obrazami sfer S_1 i S_2 są równoległe płaszczyzny S_1^* i S_2^*. Dwie pozostałe sfery przejdą na sfery S_3^* i S_4^* styczne do obu płaszczyzn S_1^* i S_2^* (a także do siebie). Wynika stąd w szczególności, że promienie tych sfer są równe. Zatem punkt styczności S_3^* i S_4^* oraz punkty styczności tych dwóch sfer z płaszczyznami S_1^* i S_2^* leżą na jednej płaszczyźnie (przechodzącej przez środki obu sfer i prostopadłej do płaszczyzn S_1^* i S_2^*). W takim razie ich przeciwobrazy muszą leżeć na sferze przechodzącej przez P, co kończy rozwiązanie.

24. *Dana są cztery sfery S_1, S_2, S_3, S_4. Sfery S_1 i S_2 są styczne zewnętrznie w punkcie A_1, S_2 i S_3 – w punkcie A_2, S_3 i S_4 – w punkcie A_3, S_4 i S_1 – w punkcie A_4. Wykazać, że punkty A_1, A_2, A_3 i A_4 leżą na jednym okręgu.*

Rozwiązanie. Rozpatrzmy inwersję o środku w punkcie styczności sfer S_1 i S_2 – A_1. Obie te sfery przejdą na płaszczyzny S_1^* i S_2^*, zaś pozostałe dwie sfery na pewne sfery S_3^* i S_4^* styczne odpowiednio do S_2^* i S_1^*. Wystarczy teraz zauważyć, że jednokładność o środku w A_3^* przekształcająca sferę S_3^* na S_4^* przekształca płaszczyznę S_2^* na S_1^* i w szczególności punkt A_2^* na A_4^*. Stąd wniosek, że punkty A_2^*, A_3^* i A_4^* leżą na jednej prostej. Ponieważ dane sfery były styczne zewnętrznie, to środek inwersji leży między płaszczyznami S_1^* i S_2^* oraz na zewnątrz sfer S_3^* i S_4^*. W takim razie nie może leżeć na prostej przechodzącej przez punkty A_2^*, A_3^* i A_4^*. A zatem przeciwobrazem tej prostej jest okrąg, co kończy rozwiązanie.

25. *W przestrzeni danych jest n sfer – każda jest styczna do każdej z pozostałych oraz żadne trzy nie są styczne w jednym punkcie. Udowodnić, że $n \leqslant 5$.*

Rozwiązanie. Rozważmy inwersję o środku w punkcie styczności pewnych dwóch spośród tych sfer. Te sfery przejdą na dwie płaszczyzny równoległe. Pozostałe sfery przejdą zaś na parami styczne sfery, styczne także do tych dwóch płaszczyzn. Co więcej ich średnice będą równe, a ich środki będą leżały na płaszczyźnie jednakowo odległej od danych dwóch płaszczyzn.

Rozważmy właśnie przekrój płaszczyzną jednakowo odległą od danych dwóch płaszczyzn. Otrzymamy w przekroju $n-2$ parami styczne okręgi o jednakowych średnicach. Jednakże na płaszczyźnie co najwyżej 3 okręgi o jednakowych średnicach mogą być parami styczne. W takim razie $n-2 \leqslant 3$, skąd $n \leqslant 5$.

26. (Hexlet Soddy'ego) *Dane są trzy parami styczne sfery C_1, C_2, C_3. Rozważamy łańcuch sfer S_1, S_2, ..., S_n taki, że każda sfera S_i jest styczna do C_1, C_2, C_3 oraz do sfer S_{i-1} i S_{i+1}. Wykazać, że jeśli wszystkie punkty styczności są różne oraz $n > 2$, to $n = 6$.*

Rozwiązanie. Inwersja o środku w punkcie styczności sfer C_1 i C_2 przekształca owe sfery na dwie równoległe płaszczyzny, zaś sferę C_3 na sferę styczną do tych dwóch płaszczyzn. Pozostałe sfery przechodzą na łańcuch sfer S_i stycznych do płaszczyzn C_1^*, C_2^* (a więc przystających) oraz do sfery C_3^* przy czym każda ze sfer S_i^* jest także styczna do sfer S_{i-1}^* i S_{i+1}^*. Takich sfer musi być dokładnie 6.

27. *Dane są cztery parami styczne zewnętrznie sfery, których środki leżą na jednej płaszczyźnie π. Sfera S jest styczna do każdej z tych sfer. Wykazać, że stosunek promienia sfery S do odległości jej środka od płaszczyzny π jest równy $1 : \sqrt{3}$.*

Rozwiązanie. Spośród czterech parami stycznych sfer wybierzmy dowolne dwie i rozważmy inwersję o środku w punkcie ich styczności. Inwersja ta przeprowadza płaszczyznę π na siebie, a wybrane dwie sfery na dwie równoległe płaszczyzny, które są prostopadłe do płaszczyzny π. Pozostałe dwie sfery, których środki leżą na płaszczyźnie π, przechodzą zaś na dwie sfery, o środkach leżących na płaszczyźnie π, styczne do tych dwóch płaszczyzn. Ponadto sfera S przechodzi na sferę styczną do tych dwóch równoległych płaszczyzn oraz do wcześniej otrzymanych dwóch sfer. W szczególności promienie otrzymanych trzech sfer są równe.

Środki tych sfer tworzą trójkąt równoboczny, a więc odległość sfery S^* od π^* jest równa $\sqrt{3}R$, gdzie R jest promieniem S^*. Stosunek promienia sfery S^* do odległości od π^* jest równy $1 : \sqrt{3}$. Pozostaje jeszcze zauważyć, że na mocy zadania 8 środek inwersji jest środkiem pewnej jednokładności przekształcającej S na S^* i π na π^*, a więc dany stosunek się nie zmienia.

Rzut stereograficzny

28. *Udowodnić, że*

a) rzut stereograficzny pokrywa się z pewną inwersją w przestrzeni obciętą do sfery S,

b) rzut stereograficzny przekształca okrąg na sferze niezawierający punktu B na okrąg na płaszczyźnie π,

c) w rzucie stereograficznym przeciwobrazem okręgu na płaszczyźnie π jest okrąg na sferze,

d) rzut stereograficzny zachowuje kąty między okręgami.

Rozwiązanie. a) Wybierzmy dowolny punkt $X \neq B$ należący do sfery S. Niech Y będzie punktem, w którym prosta BX przecina płaszczyznę π. Udowodnimy, że $BX \cdot BY = BA^2$.

Jeśli $X = A$, to $Y = A$ i nie ma czego dowodzić. W przeciwnym razie, skoro punkt X leży na sferze S, to $\angle BXA = 90°$. Ponadto dana sfera jest styczna do płaszczyzny π w punkcie A, skąd wniosek, że $\angle BAY = 90°$. Skoro punkty B, A, X, Y leżą na jednej płaszczyźnie, to trójkąty prostokątne BXA i BAY są podobne. W takim razie

$$\frac{BX}{BA} = \frac{BA}{BY},$$

zatem istotnie $BX \cdot BY = BA^2$.

W takim razie dla dowolnego punktu X ze sfery S jego obraz Y w tym przekształceniu jest obrazem punktu X w inwersji względem sfery o środku B i promieniu BA. Ponieważ rozważamy tylko punkty ze sfery S, to rzut stereograficzny jest inwersją obciętą do sfery S.

b),c),d) Skoro rzut stereograficzny jest inwersją obciętą do sfery S, to wszystkie własności inwersji dotyczące obiektów ze sfery S zostają zachowane przez ten rzut. Zatem okrąg rozłączny z punktem B musi przejść na okrąg i na odwrót (na mocy zadania 2d)). Własność zachowywania kątów między okręgami wynika natomiast z zadania 4.

29. *W przestrzeni dany jest okrąg S i punkt B. Niech A będzie rzutem prostokątnym punktu B na płaszczyznę zawierającą S. Dla każdego punktu $D \in S$ rozważamy punkt M_D – rzut prostokątny punktu A na prostą BD. Wykazać, że wszystkie punkty M_D leżą na okręgu*

Rozwiązanie. Rozważmy rzut stereograficzny sfery o średnicy BA z punktu B. Każdy punkt M_D leży na tej sferze, zaś jego obrazem w tym rzucie stereograficznym jest punkt D. Zatem zbiór punktów M_D jest przeciwobrazem zbioru wszystkich punktów D w tym rzucie stereograficznym. Na mocy zadania 28c) przeciwobrazem okręgu jest okrąg, zatem wszystkie punkty M_D leżą na jednym okręgu.

30. (Zwardoń 2007) *Rozstrzygnąć, czy istnieje taki skończony zbiór okręgów na płaszczyźnie o parami rozłącznych wnętrzach, że każdy z danych okręgów jest styczny do dokładnie pięciu spośród pozostałych okręgów.*

Rozwiązanie. Rozważmy dwunastościan foremny oraz sferę styczną do jego krawędzi (taka sfera ma środek pokrywający się ze środkami sfer wpisanej i opisanej na tym dwunastościanie, zaś jej promień jest równy odległości tego punktu od krawędzi dwunastościanu). Częścią wspólną tej sfery z każdą ze ścian jest okrąg wpisany w tę ścianę. W ten sposób otrzymujemy dwadzieścia okręgów o następującej własności: każdy z danych okręgów jest styczny do dokładnie pięciu spośród pozostałych okręgów. Wystarczy teraz wziąć rzut stereograficzny tej sfery z dowolnego punktu, który nie leży wewnątrz żadnego okręgu i wykorzystać fakt, że okręgi przechodzą na okręgi.