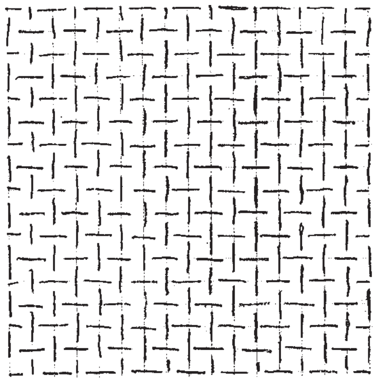
Geometria jest nauką doświadczalną

Marek KORDOS

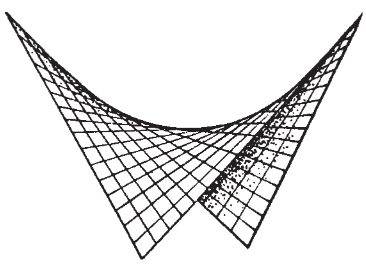
W wielu miejscach można przeczytać czy usłyszeć, że matematyka, a zwłaszcza geometria jest nauką aksjomatyczną i wszelkie zawarte w niej fakty uzyskuje się właśnie z aksjomatów przez podporządkowane prawom logiki dowody.

I chyba nikt w rzeczywistości nie spotkał się w szkole czy na studiach z tak opisaną sytuacją. Nietrudno też byłoby uzasadnić, dlaczego tak jest, ale tu nie będziemy tego robić, tylko zajmiemy się kratką wyplecioną z wikliny albo z dość sztywnych drutów (takich, z jakich zrobione są siatki w płotach), taką jak na rysunku 1.



Rys. 1

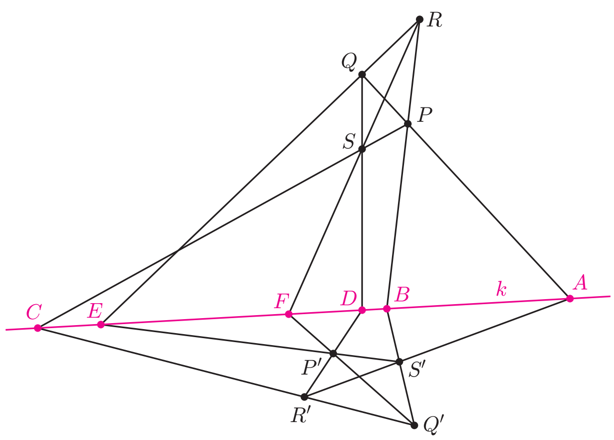
To, że jest ona kwadratowa, można łatwo zmienić. Jeśli pociągniemy ją (rzecz jasna, delikatnie) za przeciwległe rogi, możemy uzyskać romb (gdy ciągniemy w płaszczyźnie kratki) albo też coś w rodzaju siodła (gdy zegniemy kratkę – rys. 2). W tym drugim przypadku powstaje pytanie, czy faktycznie w dalszym ciągu pręty wiklinowe (czy druty) mogą pozostać proste, czy też tylko nam się tak wydaje.



Rys. 2

To, że faktycznie mogą one pozostać proste, gwarantuje twierdzenie Gallucciego:

Dane są dwie trójki prostych skośnych, w których każda prosta jednej trójki przecina każdą prostą drugiej trójki. Wówczas każda prosta przecinająca wszystkie proste jednej trójki przecina każdą prostą przecinającą wszystkie proste drugiej trójki.



Rys. 3

Ortodoksyjny geometra powinien w tym momencie sięgnąć po aksjomaty (w wersji Euklidesa, Hilberta, Tarskiego, Krygowskiej, ...) i wyprowadzić z nich to twierdzenie. My, oczywiście, postąpimy inaczej. Narysujemy (starannie, linijką – inne przyrządy nie będą potrzebne) rysunek, taki jak rysunek 3.

W ostatnim zdaniu najistotniejszym słowem jest *narysujemy* i w nim tkwi to, co uzasadni twierdzenie Gallucciego.

Nie piszę *udowodni* w obawie krzyku Beotów, jakby powiedział Gauss. Bardziej odważny ode mnie jest Harold S.M. Coxeter, który przedstawione dalej rozumowanie śmiało (i słusznie) nazywa dowodem.

Istotne jest też to, jak taki rysunek wykonać. I na czym polega jego ważna w poniższych rozumowaniach cecha, jaką jest *stabilność*.

Zaczynamy od narysowania prostej k. Następnie wybieramy dowolny, nieleżący na niej punkt P i prowadzimy przez niego dowolne trzy proste przecinające k (nazwijmy otrzymane punkty przecięcia A, B, C).

Teraz na prostej PA obieramy dowolnie punkt Q i prowadzimy przez niego dowolne dwie proste przecinające k (otrzymane punkty nazwijmy D i E) i nierównoległe do dotychczas narysowanych. Ponadto oznaczmy przecięcie prostej PB z QE przez R, a przecięcie PC z QD przez S. I jeszcze niech przecięcie RS z k nazywa się F.

Po drugiej stronie k wykonamy PRAWIE taki sam rysunek. Punkt P' obieramy dowolnie. Na prostej $P'F$ dowolnie obieramy punkt Q'. Przecięcie prostej $P'D$ z $Q'C$ oznaczamy przez R', a przecięcie $P'E$ z $Q'B$ przez S'. I teraz okazuje się (proszę sprawdzić, najlepiej wielokrotnie, różnie obierając początkowe punkty), że punkty R', S' i A leżą na jednej prostej.

To, że tak się zawsze zdarzy, nazywa się właśnie stabilnością rysunku.

Udowodnienie stabilności tego rysunku, czyli wyprowadzenie tego faktu z powszechnie znanych twierdzeń geometrii, nie jest rzeczą prostą. Robi się to, używając pojęć geometrii rzutowej. Można też spróbować to sprawdzić rachunkowo, ale widać, ile byłoby tu zmiennych (co najmniej 8 razy po dwie współrzędne punktów) i ile równań (12 prostych), z czego wyniknąć by miało jedno równanie trzynastej prostej.

No właśnie: skoro tak jest zawsze, to możemy postąpić jak przyrodnicy i uznać to za prawo przyrody, a takie nie wymagają dowodów.

Spostrzeżenie o stabilności będzie nam potrzebne, abyśmy mogli uznać, że dowodząc czegoś dla tych konkretnych punktów, dowodzimy tego dla dowolnych punktów powiązanych wskazanymi wyżej zależnościami.

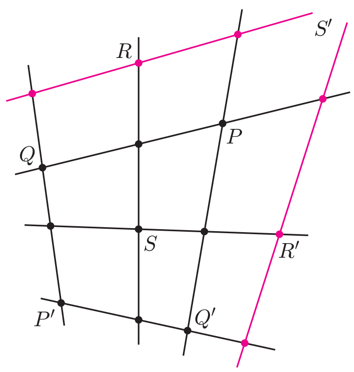
Teraz dokonamy całkiem realnej operacji: zegniemy pod pewnym kątem kartkę z rysunkiem 3 wzdłuż prostej k. Oczywiście, wygląda to nadal tak samo, więc możemy nadal korzystać z rysunku 3.

Jako jedną z trójek prostych skośnych, o których mówią założenia twierdzenia Gallucciego, weźmy PQ', $P'Q$ i RS, jako drugą – PQ, $P'Q'$ i $R'S$. Czytelnik Spostrzegawczy zauważy, że na rysunku nie ma tych prostych – to słuszna uwaga, ale ich narysowanie czyniłoby rysunek zupełnie nieczytelnym (nie wiadomo byłoby, które linie przecinają się, a które mijają), a przecież i tak o tych (niewidzialnych) prostych możemy wiele powiedzieć.

Pomysł, by nie rysować prostych, o których orzeka dowodzone twierdzenie, był lansowany przez – zdaniem wielu, największego geometrę XIX wieku – Jacoba Steinera. Głosił on, że rysunek tylko rozprasza myśli i może nasuwać fałszywe intuicje.

Możemy np. sprawdzić, że proste w każdej trójce faktycznie są skośne. Sprawdźmy to dla PQ' i $P'Q$ (pozostawiając pozostałe 5 sprawdzeń Czytelnikowi). Gdyby te proste leżały na jednej płaszczyźnie, na jednej płaszczyźnie leżałyby punkty P, Q, A, F, P' i Q', a więc kartka nie byłaby zgięta.

Możemy też sprawdzić, że każda z prostych pierwszej trójki przecina każdą z drugiej trójki. Sprawdzimy to dla PQ' (jak poprzednio, pozostawiając pozostałe 6 sprawdzeń Czytelnikowi) – dla wspomożenia wyobraźni przedstawiamy obok schemat powstałej sytuacji. PQ' z PQ ma wspólny punkt P, a z $P'Q'$ wspólny punkt Q'. Trzecie sprawdzenie jest mniej banalne: ponieważ QS i $P'R'$ mają wspólny punkt D, więc leżą na jednej płaszczyźnie i na tej płaszczyźnie poprowadzone są proste $P'Q$ i $R'S$ – gdyby były przypadkiem równoległe, wystarczy jeden z punktów na tej płaszczyźnie odrobinę przesunąć (tu korzystamy ze stabilności!).



UWAGA! To nie jest rysunek, a tylko schemat pokazujący zależności. Sytuacja rzeczywista tak nie wygląda.

Tak więc (wraz z Czytelnikiem) uzyskaliśmy dziewięć punktów zaznaczonych na schemacie czarnymi kropkami.

Połóżmy teraz poprzeczkę na pierwszej trójce prostych (po angielsku *transversal* jest pełnoprawnym terminem geometrycznym) przechodzącą przez R.

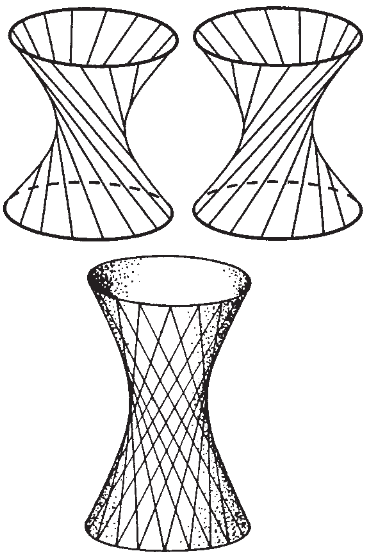
Ponieważ poprzeczka ta przecina PQ', więc leży na płaszczyźnie RPQ', czyli na RBQ' (RP i RB to ta sama prosta). Analogicznie, skoro przecina $P'Q$, więc leży na płaszczyźnie $RP'Q$, czyli $RP'E$. Zatem ta poprzeczka to przecięcie płaszczyzn RBQ' i REP', czyli prosta RS', bo proste BQ' i EP' przecinają się w S'.

Z kolei połóżmy na drugiej trójce prostych skośnych poprzeczkę przechodzącą przez R'. Leży ona na $R'PQ$, czyli $R'AQ$ i na $R'P'Q'$, czyli $R'AQ'$, a więc – jak widać, jest prostą $R'A$. Nietrudno zauważyć, że $R'A$ przechodzi przez S', a więc poprzeczki mają punkt wspólny, mianowicie S'.

* * *

Nietrudno wyobrazić sobie, że przedstawiony wyżej dowód nie wszystkich przekonał. Formalistom brakowało zapewne odwołania nie tyle może do aksjomatów, co do jakichś powszechnie uznanych za pewne, a także za normalne, twierdzeń – takich, na które moglibyśmy się powoływać, bez obawy, że nasz egzaminator ich nie zna. Realistów mogło zrazić zagmatwanie sytuacji, w której rysujemy proste, o których uzasadniane twierdzenie się nie wypowiada, by nie rysować prostych, o których mówi – i to wszystko jakoby dla większej przejrzystości.

Ale, jako się rzekło, geometria jest nauką doświadczalną. Inżynierowie umocowali sześć zbrojonych betonowych belek w sposób spełniający założenia twierdzenia Gallucciego i, faktycznie, można było na nie kłaść następne belki, zgodnie z tym twierdzeniem. Tak powstał dach przystanku kolejowego Warszawa Ochota. Twierdzenie zatem jest prawdziwe.



Rys. 4

Postscriptum 1 (o takich dowodach). W podobny sposób można dowieść np. następującego twierdzenia:

co najmniej jeden z rzutów prostokątnych środka ciężkości czworościanu na płaszczyzny jego ścian leży wewnątrz ściany.

W przeciwnym bowiem razie ten czworościan położony na stole bez końca by się przewracał.

Postscriptum 2 (o innej kratce z patyczków). Jeśli połączymy pionowymi patyczkami dwa poziome jednakowe okręgi, a następnie obrócimy jeden z tych okręgów o jakiś kąt, to otrzymamy jedną z dwóch „górnych” sytuacji z rysunku 4 – w zależności od tego, w którą stronę będziemy obracać. Nie potrzeba specjalnej wyobraźni, by nałożyć jeden rysunek na drugi, a nawet zrealizować to, co wyjdzie, wikliną lub drutem. Taką kratką jest np. konstrukcja nośna miejskiej wieży ciśnień w Ciechanowie.

Tym, którzy z pewnym dystansem odnieśli się do całego tego tekstu, przyjemnie będzie przeczytać, że administracja Ciechanowa też z dystansem odnosi się do tej budowli.

Postscriptum 3 (może jednak trochę formalizmu). Pewna Młoda Dama po przeczytaniu wersji wstępnej tego tekstu powiedziała, że to chyba wiele hałasu o nic, bo o obu tych powierzchniach jest mowa na I roku studiów matematycznych w ramach algebry liniowej – są to *paraboloida hiperboliczna* i *hiperboloida jednopowłokowa*, o wygodnych równaniach

$$x - y^2 + z^2 = 0 \qquad \text{i} \qquad x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0.$$

Rzeczywiście, to są te powierzchnie, ale pamiętam, że – gdy byłem na I roku – stwierdzenie, że to takie gęste kratki, zrobiło na mnie wrażenie i chciałem się dowiedzieć, czy to można jakoś zobaczyć, a nie tylko wyliczyć.

Postscriptum 4 (Wielcy też o tym myśleli). Okazuje się, że sprawa kratek nękała też Hugona Steinhausa. W *Księdze Szkockiej* są aż cztery postawione przez niego problemy na ten temat. Oto one.

Problem 44. *Ciągła funkcja $z = f(x, y)$ przedstawia powierzchnię, przez której każdy punkt przechodzą dwie proste całkowicie na niej leżące. Wykazać, że to jest paraboloida hiperboliczna. To samo bez założenia ciągłości.*

I jest dopisek z 30 lipca 1935 roku: *Ten problem pozytywnie rozstrzygnął Banach, również bez założenia ciągłości. Dowód opiera się na spostrzeżeniu, że dowolne dwie proste tej powierzchni albo się przecinają, albo ich rzuty na płaszczyznę xy są równoległe.*

Problem 61. *Wyznaczyć powierzchnie $z = f(x, y)$, takie, że przez każdy ich punkt przechodzą dwie przystające krzywe płaskie całkowicie na nich leżące (mocniej: przez każdy punkt takie same).*

Dopisek Stanisława Ruziewicza (z 31 lipca 1935 roku): *Wszystkie powierzchnie obrotowe mają tę własność; nie wiadomo, czy tylko one.*

Problem 78, *2 sierpnia 1935 roku. Znaleźć wszystkie powierzchnie o następującej własności: przez każdy punkt przechodzą dwie krzywe całkowicie na nich leżące i przystające odpowiednio do krzywych A i B (np. tak jest na walcu).*

Tu koledzy zawiedli – brak odpowiedzi do dzisiaj.

Problem 81 (z 6 sierpnia 1935 roku) też jest na ten temat, ale jest postawiony tak zawile, że komentator w wydanej pod redakcją R. Daniela Mauldina *The Scottish Book* ograniczył się do podania kilku możliwych interpretacji zadanych w nim pytań i (co jest całkowitym w tej książce ewenementem) podpisał się nic nieznaczącym pseudo: *Recenzent.*

Po tych wszystkich wyjaśnieniach

czuję się usprawiedliwiony z napisania tego tekstu, *M. K.*

Księga Szkocka to brulion, w którym matematycy lwowscy i ich goście z najróżniejszych krajów od 17 lipca 1935 roku do 31 maja 1941 roku zapisywali przychodzące im do głowy problemy. A było ich niemało, jako że brulion mieścił się w lokalu gastronomicznym, w którym lubili spędzać czas, a który nazywał się właśnie *Szkocka*. Brulion – również z późniejszymi komentarzami i wyjaśnieniami – został wydany w języku angielskim, w 1981 roku w Kanadzie.

Rozwiązanie zadania M 1367.
Mamy

$$x + \sqrt{x^2+1} = \frac{1}{y + \sqrt{y^2+1}} = \sqrt{y^2+1} - y.$$

Podobnie,

$$y + \sqrt{y^2+1} = \sqrt{x^2+1} - x.$$

Dodając te równości stronami, otrzymujemy tezę.