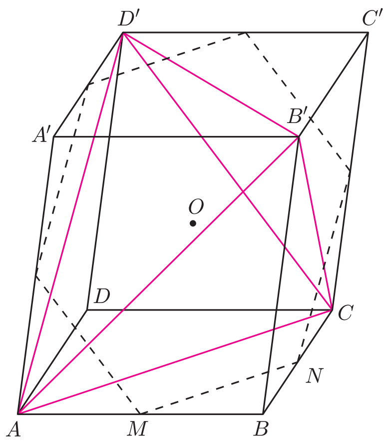
Kącik przestrzenny (13) Czworościany równościenne – część 2

Czworościan równościenny to taki, którego wszystkie ściany są przystające – patrz też *Delta* 4/2012.



Kontynuujemy opowieść o czworościanach równościennych – tym razem przyjrzymy się paru zadaniom z nimi związanym. Jakiś czas temu na konkursach matematycznych temat tych wdzięcznych czworościanów był dosyć modny. Sporo było zadań tego typu: udowodnij, że pewne dwa warunki charakteryzujące czworościan równościenny są równoważne. Każdy temat zostaje jednak kiedyś wyeksploatowany. Czworościany równościenne pojawiają się w zadaniach konkursowych do dziś, ale są dużo bardziej zakamuflowane. Jedno z takich zadań znalazło się niedawno na polskiej olimpiadzie matematycznej.

1. (OM 59-III-5) *Pola wszystkich przekrojów równoległościanu $\mathcal{R}$ płaszczyznami przechodzącymi przez środki trzech jego krawędzi, z których żadne dwie nie są równoległe i nie mają punktów wspólnych, są równe. Udowodnić, że równoległościan $\mathcal{R}$ jest prostopadłościanem.*

Poznajecie? No właśnie – to zadanie jest łudząco podobne do twierdzenia, że czworościan, którego ściany mają równe pola, jest równościenny. Przekonajmy się więc, czy nasze podejrzenie jest słuszne.

Rozwiązanie. Niech $ABCDA'B'C'D'$ będzie równoległościanem $\mathcal{R}$ rozważanym w zadaniu. Jak wiemy z poprzedniego odcinka, wystarczy, jeśli wykażemy, że czworościan $AB'CD'$ wpisany w ten równoległościan jest równościenny, a to będzie udowodnione, gdy uzasadnimy, że pola jego ścian są równe.

Rozważmy przekrój płaszczyzną przechodzącą przez środki krawędzi AB, CC' i $A'D'$ (rysunek). Nietrudno udowodnić, że przekrój ten jest sześciokątem przechodzącym także przez środki krawędzi BC, $C'D'$ i AA' oraz zawierającym środek symetrii O danego równoległościanu. Punkt O jest także środkiem symetrii tego sześciokąta, więc pole rozważanego przekroju jest 6 razy większe niż pole trójkąta MNO, gdzie M i N są środkami odcinków AB i BC. Z drugiej strony pole tego trójkąta jest 4 razy mniejsze niż pole trójkąta ACD' będącego ścianą czworościanu $AB'CD'$. Stąd wniosek, że pole ściany ACD' stanowi $\frac{2}{3}$ pola rozważanego przekroju.

Ponieważ podobne rozumowanie można przeprowadzić dla pozostałych ścian czworościanu $AB'CD'$, to z równości pól danych przekrojów wynika równość pól ścian tego czworościanu – a to właśnie chcieliśmy wykazać.

A oto inne zadanie, z dość dawnych czasów, związane z czworościanami równościennymi.

2. (Olimpiada Moskiewska 1954) *Czy w przestrzeni trójwymiarowej można znaleźć takie punkty A, B, C, D, dla których spełnione są warunki:*

$$AB = CD = 8, \qquad AC = BD = 10, \qquad AD = BC = 13?$$

Rozwiązanie. O co nas tak naprawdę pytają? O to, czy istnieje czworościan równościenny, którego ściany są trójkątami o bokach 8, 10, 13. W poprzednim kąciku jednak stwierdziliśmy, że ściany takiego czworościanu muszą być trójkątami ostrokątnymi, zaś z nierówności $13^2 = 169 > 164 = 10^2 + 8^2$ wynika, że trójkąt o bokach 8, 10, 13 jest rozwartokątny. Zatem taka czwórka punktów w przestrzeni nie istnieje.

Na koniec przedstawiamy kilka innych zadań, blisko związanych z tematem czworościanów równościennych, choć nie zawsze to od razu widać.

Zadania

3. *Dany jest czworościan $A_1A_2A_3A_4$. Przez s_i oznaczmy długość odcinka będącego częścią wspólną środkowej czworościanu poprowadzonej z wierzchołka A_i i kuli wpisanej w ten czworościan. Wiadomo, że $s_1 = s_2 = s_3 = s_4$. Rozstrzygnąć, czy czworościan ten musi być foremny.*

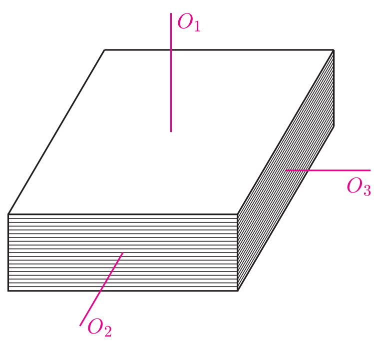
4. *Sfera wpisana w czworościan jest styczna do dwóch ścian w środkach okręgów opisanych, a do trzeciej w ortocentrum. Dowieść, że czworościan ten jest foremny.*

5. *Czy mając dane promienie sfer dopisanych do czworościanu oraz promień sfery wpisanej w ten czworościan można wyznaczyć jego objętość?*

Rozwiązania podanych zadań można znaleźć na stronie internetowej *Delty*.

Michał KIEZA

Rozwiązanie zadania F 822.
Załóżmy, że książkę można traktować jako jednorodny prostopadłościan.



Jego (główne) momenty bezwładności względem osi O_1, O_2 i O_3 wynoszą odpowiednio I_1, I_2 oraz I_3, przy czym $I_1 < I_2 < I_3$. Jeśli ω_1, ω_2 i ω_3 są składowymi prędkości kątowej książki wzdłuż tych osi, energia kinetyczna i kwadrat długości wektora momentu pędu wynoszą odpowiednio

$$T = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2)$$

oraz

$$L^2 = I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2.$$

Ponieważ na książkę nie działają żadne siły, wielkości T i L^2 są zachowane, a więc stała jest również wielkość

$$2I_1T - L^2 = \\ = I_2(I_1 - I_2)\omega_2^2 + I_3(I_1 - I_3)\omega_3^2.$$

W opisanej sytuacji (obrót początkowo wokół osi O_1) wielkość ta jest z dobrym przybliżeniem równa zeru. Skoro jednak współczynniki przy ω_2^2 i ω_3^2 są ujemne, to obrót wokół osi O_2 lub O_3 wiązałby się z przyjmowaniem przez rozważaną wielkość wartości ujemnej, istotnie różnej od zera, co nie jest możliwe. (Doświadczenie można zobaczyć na `www.youtube.com/watch?v=GgVpOorcKqc`.)