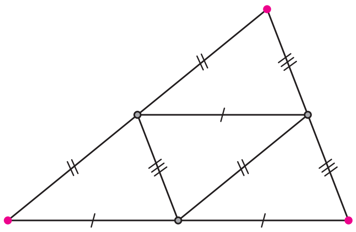
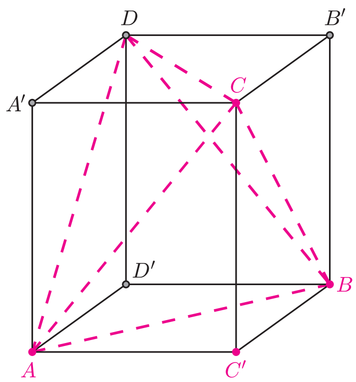
Kącik przestrzenny (12) Czworościany równościenne – część 1



Rys. 1

Na płaszczyźnie, jeśli trójkąt ma równe boki, to jest równoboczny. W przestrzeni jednak czworościan, którego ściany są przystające, wcale nie musi być foremny. Aby się o tym przekonać, wystarczy narysować dowolny nierównoboczny trójkąt ostrokątny, podzielić go na cztery przystające trójkąty (łącząc środki jego boków, jak na rysunku 1) i zauważyć, że otrzymujemy w ten sposób siatkę czworościanu (dlaczego?). Inaczej, można spojrzeć na czworościan $ABCD$ w prostopadłościanie $AC'BD'A'CB'D$ (rys. 2). Ma on przeciwległe krawędzie równej długości, a więc jego ściany są przystające. Takie czworościany nazywamy **równościennymi**. O nich opowiemy w najbliższych dwóch odcinkach.
W tym kąciku zrobimy krótki przegląd ich własności, a następnym razem przyjrzymy się paru zastosowaniom w zadaniach olimpijskich.



Rys. 2

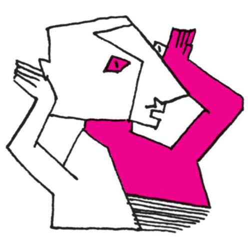
Jednym z ważniejszych faktów związanych z czworościanem równościennym jest to, że równoległościan na nim opisany jest prostopadłościanem. To pociąga za sobą wiele ważnych konsekwencji, np. środek sfery opisanej, środek sfery wpisanej oraz środek ciężkości czworościanu są tym samym punktem – środkiem opisanego prostopadłościanu. Nietrudno również uzasadnić, że jeśli którekolwiek dwa z tych punktów się pokrywają, to czworościan jest równościenny.

Można sformułować bardzo wiele warunków równoważnych temu, że czworościan jest równościenny. Wybrane podajemy poniżej. W szczególności interesujące jest to, że wystarczy założyć równość pól ścian.

Twierdzenie. *Dla dowolnego czworościanu $ABCD$ następujące warunki są równoważne*:

1. *wszystkie ściany są przystające*;
2. *wszystkie ściany mają okręgi opisane o jednakowym promieniu*;
3. *wszystkie ściany mają równe pola*;
4. *wszystkie ściany mają równe obwody*;
5. *przeciwległe krawędzie są równe*;
6. *siatka czworościanu jest trójkątem ostrokątnym podzielonym na cztery przystające trójkąty*;
7. *suma kątów płaskich w każdym wierzchołku jest równa* $180°$ (*wystarczy nawet w trzech*);
8. $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD = \sphericalangle BDC$;
9. *równoległościan opisany na czworościanie jest prostopadłościanem*;
10. *rzut prostokątny czworościanu na dowolną płaszczyznę równoległą do dwóch przeciwległych krawędzi jest prostokątem*;
11. *wszystkie biśrodkowe są parami prostopadłe*;
12. *każda biśrodkowa jest prostopadła do krawędzi, które łączy*;
13. *pewne dwa punkty spośród następujących*: *środek ciężkości*, *środek sfery wpisanej*, *środek sfery opisanej*, *się pokrywają*;
14. *sfera wpisana w czworościan jest styczna do wszystkich ścian w środkach okręgów opisanych* (*wystarczy nawet do dwóch*).

Warto odnotować, że z warunku 6 wynika, że ściany każdego czworościanu równościennego są ostrokątne. Natomiast warunek 14 jest równoważny temu, że wszystkie sfery dopisane są styczne do ścian w ortocentrach.



Zachęcamy Czytelników do samodzielnego zmierzenia się z tym twierdzeniem. Dużą część dowodu można znaleźć w artykule Waldemara Pompego („O czworościanie równościennym”, *Delta* 3/1994; jest dostępny na stronie internetowej *Delty*). Warto tam zajrzeć chociażby po to, żeby sprawdzić,

Dowód nieistnienia nieskończonego ciągu arytmetycznego złożonego z liczb pierwszych: wyraz o numerze m ciągu $a_k := m + n \cdot k$ dzieli się przez m.

Jednym ze składników sumy

$$R = (1+1)^{1000} = \binom{1000}{0} + \binom{1000}{1} + \binom{1000}{2} + \ldots + \binom{1000}{500} + \ldots + \binom{1000}{1000}$$

jest liczba P.

Zatem $P < R$.

Warto wspomnieć, że można rozważać także **czworościany półrównościenne**, czyli takie, które mają dwie pary trójkątów przystających (albo inaczej: dwie pary przeciwległych krawędzi równych). Większość własności czworościanów równościennych ma swoje odpowiedniki dla czworościanów półrównościennych. Zachęcam Czytelników do samodzielnego zbadania tej klasy.

w jakiej kolejności najwygodniej wyprowadzać jedne warunki z innych – tutaj są pogrupowane ze względu na obiekty, których dotyczą.

Czworościany równościenne są na tyle regularne, że wiele wielkości z nimi związanych wyraża się stosunkowo prostymi, jak na czworościany, wzorami. Przyjmując, że każda ściana takiego czworościanu jest trójkątem o bokach długości a, b, c, można obliczyć, że

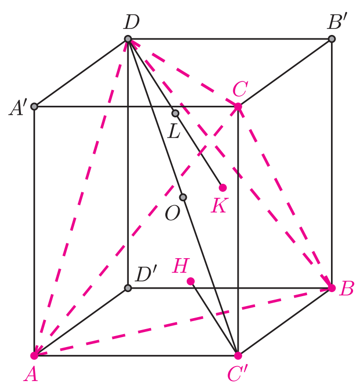
$$V = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}{8}},$$

$$R = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}},$$

$$S = \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)},$$

gdzie V, R i S oznaczają odpowiednio objętość, długość promienia sfery opisanej oraz pole powierzchni całkowitej. Dzieląc potrojoną objętość przez pole, otrzymamy wzór na promień sfery wpisanej. Można także sprawdzić, że środki sfer dopisanych leżą w wierzchołkach prostopadłościanu opisanego na czworościanie i każda z tych sfer ma promień dwa razy większy od promienia sfery wpisanej. Ponadto Czytelnik Wnikliwy może znaleźć wzory na długości biśrodkowych, środkowych i wysokości.

Na koniec udowodnimy jeszcze jedno ciekawe twierdzenie związane z czworościanami równościennymi.



Rys. 3

Twierdzenie (sfera dwunastu punktów). *W czworościanie równościennym spodki wysokości, środki wysokości i punkty przecięcia wysokości ścian tego czworościanu leżą na jednej sferze.*

Dowód. Rozważmy czworościan równościenny $ABCD$ wpisany w prostopadłościan $AC'BD'A'CB'D$ o środku O (rys. 3). Wystarczy, jeśli udowodnimy, że odległości punktu O od dwunastu rozważanych punktów są równe. Z uwagi na symetrię wystarczy dowieść, że $OH = OK = OL$, gdzie H jest ortocentrum trójkąta ABC, K – spodkiem wysokości poprowadzonej z punktu D, natomiast L jest jej środkiem. □

Z pierwszego zadania omawianego w kąciku 5 (a mówiłem, że to zadanie jeszcze się przyda...) wiemy, że $C'H$ jest prostopadłe do ABC. Z drugiej strony nietrudno stwierdzić, że punkt L leży na płaszczyźnie $A'B'D'$ oraz $DL \perp A'B'D'$. W takim razie punkty H i L są symetryczne względem punktu O. Ponadto trójkąt HKL jest prostokątny, ponieważ punkty K i L leżą na wysokości czworościanu opuszczonej na ścianę ABC. Punkt O jest środkiem przeciwprostokątnej tego trójkąta, skąd wynika, że $OH = OK = OL$.

Jak widać, czworościan równościenny ma niesamowicie dużo różnych dobrych własności. Jednej rzeczy jednak na ogół nie posiada – nie ma ortocentrum. I chyba całe szczęście, bowiem jeśli już je ma, to musi być foremny. A tak mamy całą rodzinę dość regularnych czworościanów z mnóstwem ciekawych własności, których wiele odpowiedników na płaszczyźnie jest zarezerwowanych tylko dla trójkątów równobocznych.

Michał KIEZA

Rozwiązanie zadania Sophie Germain: oczywiście

$$n^4 + 4 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2).$$

?

Która liczba jest większa?

$$S = \binom{2012}{1006} \quad \text{czy} \quad T = 2^{2000}$$