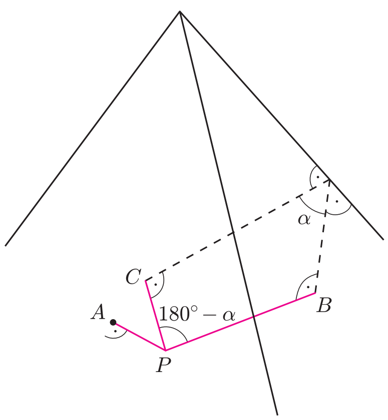
Kącik przestrzenny (9)

Kąty dwuścienne

W tym odcinku przyjrzymy się kątom dwuściennym. Jedną z najbardziej skutecznych metod radzenia sobie z nimi jest przeformułowanie problemu tak, żeby zamiast kątów dwuściennych pojawiły się kąty płaskie. Można to zrobić w następujący sposób: bierzemy dowolny punkt P znajdujący się wewnątrz kąta bryłowego i rzutujemy go na płaszczyzny zawierające ściany tego kąta. Otrzymujemy w wyniku kąt bryłowy, w którym kąty płaskie są dopełnieniami odpowiednich kątów dwuściennych do kąta półpełnego, a kąty dwuścienne tego kąta są dopełnieniami do $180°$ kątów płaskich pierwszego kąta (zachęcam Czytelnika do sprawdzenia tego faktu). Taki kąt nazywamy *kątem dopełniającym* do danego albo *kątem biegunowym* (ang. *polar angle*). Po przeformułowaniu problemu możemy skorzystać z twierdzeń o kątach płaskich z poprzedniego odcinka. Jedno z nich przyda nam się w tym artykule, a więc przypomnijmy jego sformułowanie.

Twierdzenie 1. *W dowolnym wypukłym kącie bryłowym suma kątów płaskich jest mniejsza od* $360°$.

Wykorzystamy opisaną metodę do rozwiązania następującego zadania.



Rys. 1

1. (OM 33-III-6) *Udowodnić, że w dowolnym czworościanie suma kątów dwuściennych jest większa od* $360°$.

Rozwiązanie. Teza wynika z następującego lematu: *w dowolnym kącie trójściennym suma kątów dwuściennych przy jego krawędziach jest większa od* $180°$.

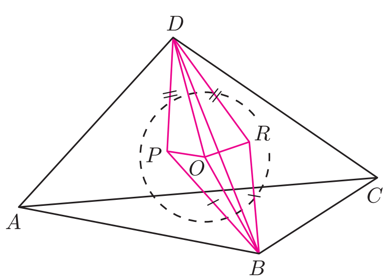
Dowód lematu. Niech P będzie dowolnym punktem leżącym wewnątrz danego kąta trójściennego, a A, B i C jego rzutami prostokątnymi na płaszczyzny zawierające ściany danego kąta trójściennego (rys. 1). Jeśli α, β i γ oznaczają miary kątów dwuściennych, to miary kątów płaskich BPC, CPA, APB są równe $180° - \alpha$, $180° - \beta$, $180° - \gamma$. Z twierdzenia 1 wynika, że

$$(180° - \alpha) + (180° - \beta) + (180° - \gamma) < 360°,$$

a stąd $\alpha + \beta + \gamma > 180°$.

Zamiana na kąty płaskie nie jest jedyną skuteczną sztuczką. Oto przykład innej metody:

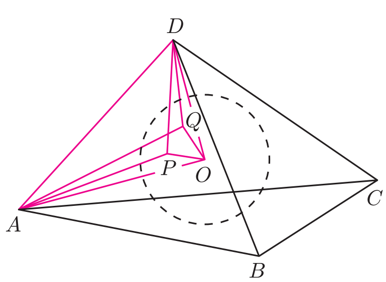
2. (IMO LONGLIST 1986) *Punkt O jest środkiem sfery wpisanej w czworościan $ABCD$, przy czym prosta OD jest prostopadła do krawędzi AD. Znaleźć miarę kąta dwuściennego między płaszczyznami BOD i COD.*



Rys. 2

Rozwiązanie. Wykażemy, że miara tego kąta jest równa $90°$.

Niech P, Q, R będą punktami styczności sfery wpisanej odpowiednio ze ścianami ABD, ACD, BCD. Z równości $BP = BR$, $DP = DR$ i $OP = OR$ wnioskujemy, że czworościany $BODP$ i $BODR$ są przystające (rys. 2). Zatem kąt dwuścienny między płaszczyznami BOD i DOP jest równy kątowi dwuściennemu między płaszczyznami BOD i DOR. Analogicznie dowodzimy, że kąt dwuścienny między płaszczyznami COD i DOQ jest równy kątowi dwuściennemu między płaszczyznami COD i DOR. Wykażemy, że punkty D, O, P, Q leżą na jednej płaszczyźnie. Wtedy, korzystając z poprzednich obserwacji, łatwo obliczyć, że kąt dwuścienny między płaszczyznami BOD i COD ma miarę $90°$.



Rys. 3

Ponieważ płaszczyzna ABD jest prostopadła do prostej OP, to $AD \perp OP$ (rys. 3). Stąd i z danego w treści warunku $AD \perp OD$ dostajemy $AD \perp DOP$. Analogicznie udowodnimy, że $AD \perp DOQ$. Zatem punkty D, O, P, Q leżą na jednej płaszczyźnie prostopadłej do krawędzi AD, co kończy dowód.

Zadania

3. *Udowodnić, że w dowolnym czworościanie suma miar kątów dwuściennych przy wszystkich krawędziach jest mniejsza od* $540°$.

4. (OM 45-I-12) *Wykazać, że sumy przeciwległych kątów dwuściennych czworościanu są równe wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości przeciwległych krawędzi są równe.*

Wskazówka do zadania 4: Sumy długości przeciwległych krawędzi czworościanu są równe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje sfera styczna do wszystkich krawędzi czworościanu.

Więcej zadań na `deltami.edu.pl`.

Michał KIEZA