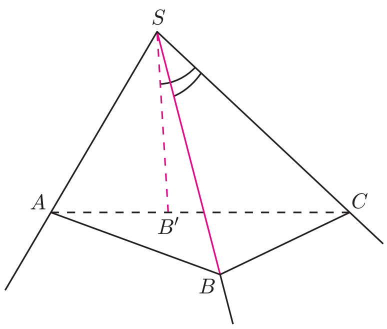
Kącik przestrzenny (8)

Kąty płaskie w przestrzeni

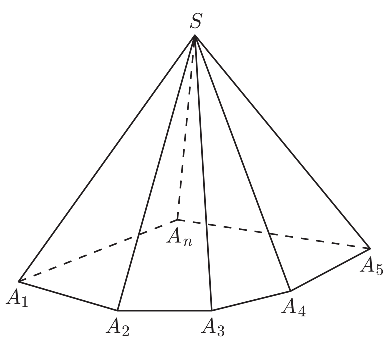
Tym razem opowiemy o kątach w przestrzeni, a dokładniej o tym, jak rozwiązywać zadania zawierające nierówności miar kątów w przestrzeni.
W zadaniach pojawiają się dwa typy kątów – płaskie i dwuścienne. Ten odcinek poświęcimy kątom płaskim, a o dwuściennych opowiemy następnym razem.
W zadaniach z nierównościami dotyczącymi kątów płaskich nie ma wielkiej filozofii, należy zapamiętać jedno ważne twierdzenie i jeden prosty wniosek – właśnie od nich rozpoczniemy.



Rys. 1

Twierdzenie 1. *W dowolnym kącie trójściennym każdy z kątów płaskich jest mniejszy od sumy dwóch pozostałych kątów.*

Dowód. Mamy wykazać, że w kącie trójściennym $SABC$ o wierzchołku S zachodzi nierówność $\sphericalangle ASB + \sphericalangle BSC > \sphericalangle ASC$ (rys. 1). Przyjmijmy, że $\sphericalangle ASC > \sphericalangle BSC$ (w przeciwnym przypadku nie ma czego dowodzić). Niech B' będzie punktem leżącym wewnątrz ściany ASC, takim że $\sphericalangle CSB' = \sphericalangle CSB$ i $SB' = SB$. Można, oczywiście, przyjąć, że punkt A leży na prostej $B'C$. Wtedy z nierówności trójkąta mamy $AB + BC > AC$, skąd otrzymujemy, że $AB > AB'$. Trójkąty ASB i ASB' mają dwa boki równe, a trzeci w pierwszym jest większy, skąd wniosek, że $\sphericalangle ASB > \sphericalangle ASB'$ (np. na mocy twierdzenia cosinusów). To zaś dowodzi naszej nierówności.



Rys. 2

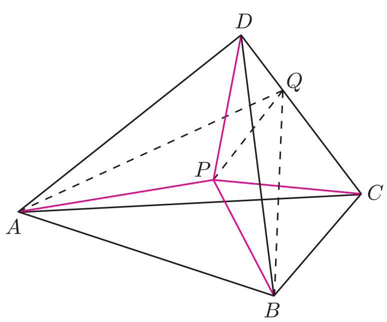
Twierdzenie 2. *W dowolnym wypukłym kącie bryłowym suma kątów płaskich jest mniejsza od* $360°$.

Dowód. Przyjmijmy, że dany kąt bryłowy o wierzchołku S tworzy n ścian. Niech $A_1A_2\ldots A_n$ będzie wielokątem powstałym z przecięcia ścian tego kąta płaszczyzną. Korzystając z poprzedniego twierdzenia dla $i = 1, 2, \ldots, n$, dostajemy nierówności

$$\sphericalangle A_{i-1}A_iS + \sphericalangle SA_iA_{i+1} > \sphericalangle A_{i-1}A_iA_{i+1}.$$

Dodając je wszystkie stronami, otrzymamy po lewej stronie $n \cdot 180° - d$, gdzie d oznacza sumę kątów płaskich danego kąta bryłowego, a po prawej sumę kątów wielokąta $A_1A_2\ldots A_n$, czyli $(n-2)\cdot 180°$. Stąd wynika, że $d < 360°$.

Dowód twierdzenia 2 wskazuje, że czasem, zamiast patrzeć bezpośrednio na interesujący nas kąt, warto spojrzeć na dwa pozostałe kąty trójkąta i dla nich stosować twierdzenie 1. Wykorzystamy naszą wiedzę do rozwiązania następującego zadania.



Rys. 3

1. (OM 55-I-8) *Punkt P leży wewnątrz czworościanu $ABCD$. Dowieść, że*

$$\sphericalangle APB + \sphericalangle BPC + \sphericalangle CPD + \sphericalangle DPA > 360°.$$

Rozwiązanie. Przyjmijmy, że płaszczyzna ABP przecina krawędź CD w punkcie Q (rys. 3). Stosując twierdzenie 1, otrzymujemy

$$\sphericalangle BPC + \sphericalangle CPQ > \sphericalangle BPQ \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle DPQ + \sphericalangle DPA > \sphericalangle APQ.$$

Ponieważ $\sphericalangle CPQ + \sphericalangle DPQ = \sphericalangle CPD$, więc dostajemy

$$\sphericalangle APB + \sphericalangle BPC + \sphericalangle CPD + \sphericalangle DPA > \sphericalangle APB + \sphericalangle BPQ + \sphericalangle APQ = 360°.$$

Jak nietrudno zauważyć, z powyższego zadania wynika ogólniejszy rezultat, który był treścią jednego z zadań na III Austriacko-Polskich Zawodach Matematycznych:

$$\sphericalangle APB + \sphericalangle BPC + \sphericalangle CPA + \sphericalangle APD + \sphericalangle BPD + \sphericalangle CPD > 540°.$$

Zadania

2. (ZWARDOŃ 2001) *Udowodnić, że w dowolnym czworościanie istnieje wierzchołek, przy którym wszystkie kąty płaskie są ostre.*

3. (YUG 1985) *Niech P będzie dowolnym punktem wewnątrz czworościanu $ABCD$. Dowieść, że*

$$\sphericalangle APB + \sphericalangle BPC + \sphericalangle CPA > \sphericalangle ADB + \sphericalangle BDC + \sphericalangle CDA.$$

Więcej zadań na internetowej stronie *Delty*.

Michał KIEZA