Wyjście w przestrzeń

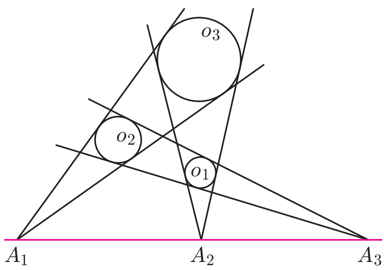
Joanna JASZUŃSKA

Zadania ze stereometrii często uważa się za trudne i upraszcza przez „spłaszczanie”: siatki, rzuty, przekroje... Czasem warto zdobyć się na odwagę i, przeciwnie, rozwiązywać zadanie płaskie, „wychodząc” w przestrzeń trójwymiarową.

1. Posadź 10 drzew tak, by utworzyły 10 rzędów po trzy drzewa.

2. Okręgi o_1, o_2, o_3 są rozłączne zewnętrznie. Te dwie styczne do o_1 i o_2, które nie rozdzielają tych okręgów, przecinają się w punkcie A_3. Analogicznie definiujemy punkty A_1 i A_2 (rys. 1). Wykaż, że punkty A_1, A_2, A_3 są współliniowe.

W *deltoidzie* 15 rozwiązaliśmy zadanie 2, składając jednokładności.

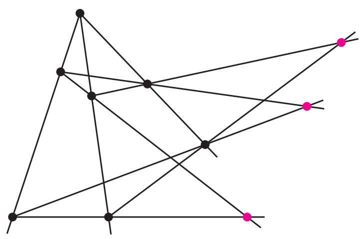


Rys. 1. O_i – środek okręgu o_i, r_i – promień okręgu o_i.

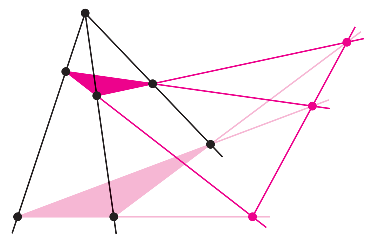
3. Czterej wędrowcy idą po płaskiej łące. Każdy z nich maszeruje prosto przed siebie ze swoją stałą prędkością. Z dróg, którymi idą, żadne dwie nie są równoległe ani żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. Udowodnij, że jeśli ma miejsce pięć spośród sześciu możliwych spotkań wędrowców, to szóste spotkanie też musi nastąpić.

Rozwiązania

R1. Posadźmy drzewa jak na rysunku 2.



Rys. 2. Najpierw sadzimy 7 drzew oznaczonych •, następnie w punktach przecięcia odpowiednich par prostych sadzimy pozostałe trzy drzewa (oznaczone •).



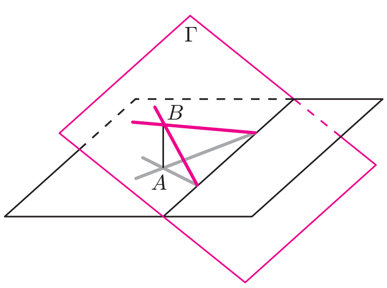
Rys. 3. Twierdzenie Desarguesa: punkty • leżą na jednej prostej.

Czy trzy wyróżnione punkty leżą na dziesiątej, brakującej nam do kompletu prostej? Tak, a orzeka to twierdzenie Desarguesa. Aby je udowodnić, spójrzmy na rysunek 2 jako na płaski obraz przestrzennego kąta trójściennego, przeciętego dwiema kolorowymi płaszczyznami (rys. 3). Interesujące nas punkty należą do obu tych płaszczyzn przekrojów, zatem także do ich wspólnej prostej, co kończy dowód. □

Dwie nierównoległe płaszczyzny przecinają się wzdłuż prostej.

R2. Jeśli O_1, O_2, O_3 są na jednej prostej, to A_1, A_2, A_3 też na niej są. Załóżmy więc, że środki okręgów nie są współliniowe. Płaszczyznę zawierającą dane okręgi oznaczmy przez Π. Niech punkty P_1, P_2, P_3 wszystkie leżą po jednej stronie płaszczyzny Π tak, że dla każdego i rzutem punktu P_i na Π jest O_i oraz $P_iO_i = r_i$. Punkty P_i nie są współliniowe, bo O_i nie są. Niech Π' będzie płaszczyzną wyznaczoną przez P_i. Nie jest ona równoległa do Π, bo r_i są różne. Zatem Π i Π' przecinają się wzdłuż pewnej prostej.

Okręgi o_1 i o_2 są jednokładne względem A_3, więc $A_3O_1/A_3O_2 = r_1/r_2 = P_1O_1/P_2O_2$. Stąd punkty A_3, P_1, P_2 są współliniowe, czyli punkt A_3 leży na płaszczyźnie Π'. Leży też na Π, więc należy do ich wspólnej prostej. Analogicznie należą do niej punkty A_1 i A_2, co kończy dowód. □



Rys. 4. Pozioma płaszczyzna – łąka, na niej szare drogi dwóch wędrowców, którzy spotykają się w punkcie A. Pionowa oś – czas; kolorowe proste – trajektorie tych dwóch wędrowców w czasoprzestrzeni, przecinają się one w punkcie B i wyznaczają kolorową płaszczyznę Γ.

R3. Wprowadźmy oś czasu prostopadłą do łąki i rozważmy trajektorie wędrowców w tej trójwymiarowej czasoprzestrzeni. Są one półprostymi, ponieważ prędkości marszu są stałe. Spotkanie wędrowców oznacza, że obaj są jednocześnie w miejscu przecięcia ich dróg. W naszym trójwymiarowym modelu to oznacza, że ich trajektorie się przecinają (rys. 4).

Trajektoria każdego wędrowca, który spotyka się z dwoma z rysunku 4, też musi leżeć na płaszczyźnie Γ. Jeśli ma miejsce pięć z sześciu możliwych spotkań, to na Γ leżą wszystkie cztery trajektorie przestrzenne. Wtedy powstaje też szósty punkt przecięcia trajektorii, który odpowiada ostatniemu spotkaniu. □

Rozwiązanie na stronie `www.om.edu.pl`, w broszurce z Obozu Naukowego OM z 2004 r.

Dodatkowo można wykazać, że w każdej chwili wszyscy wędrowcy znajdują się na jednej prostej. Proszę spróbować!