Kąty dwuścienne – zadania

1. Udowodnić, że w dowolnym czworościanie suma miar kątów dwuściennych przy wszystkich krawędziach jest mniejsza od 540°. Wykazać dodatkowo, że oszacowanie to oraz oszacowanie dolne przez 360° (patrz artykuł) są optymalne.

2. Udowodnić, że w każdym kącie trójściennym miara dowolnego z trzech kątów dwuściennych powiększona o 180° jest większa od sumy miar pozostałych dwóch kątów dwuściennych.

3. Udowodnić, że suma kątów dwuściennych wypukłego kąta bryłowego posiadającego n ścian jest większa niż $(n-2)\cdot 180^\circ$.

4. W pewnym wypukłym kącie bryłowym suma kątow płaskich jest równa sumie kątów dwuściennych. Wykazać, że ten kąt jest kątem trójściennym.

5. Wykazać, że jeśli wszystkie kąty płaskie pewnego kąta trójściennego są rozwarte, to wszystkie kąty dwuścienne tego kąta trójściennego również są rozwarte.

6. Wykazać, że jeśli wszystkie kąty dwuścienne pewnego kąta trójściennego są ostre, to wszystkie kąty płaskie tego kąta trójściennego również są ostre.

7. (OM 34-III-6) Wykazać, że jeśli w pewnym czworościanie wszystkie kąty dwuścienne są ostre, to wszystkie ściany tego czworościanu są trójkątami ostrokątnymi.

8. (OM 45-I-12) Wykazać, że sumy przeciwległych kątów dwuściennych czworościanu są równe wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości przeciwległych krawędzi są równe.
Wsk.: Udowodnić, że sumy długości przeciwległych krawędzi czworościanu są równe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje sfera styczna do wszystkich krawędzi czworościanu.

9. W czworościanie $ABCD$ kąty dwuścienne przy krawędziach AB i CD są równe oraz kąty dwuścienne przy krawędziach BC i AD są równe. Dowieść, że $AB = CD$ i $BC = AD$.

10. W ostrosłupie $ABCDS$ zachodzi $AS = BS = CS = DS$. Udowodnić, że suma kątów dwuściennych przy krawędziach AS i CS jest równa sumie kątów dwuściennych przy krawędziach BS i DS.

Rozwiązania

1. *Udowodnić, że w dowolnym czworościanie suma miar kątów dwuściennych przy wszystkich krawędziach jest mniejsza od* $540°$*. Wykazać dodatkowo, że oszacowanie to oraz oszacowanie dolne przez* $360°$ *(patrz artykuł) są optymalne.*

Rozwiązanie. Niech O będzie środkiem sfery wpisanej w ten czworościan, a O_1, O_2, O_3, O_4 – jego rzutami prostokątnymi na ściany tego czworościanu. Zauważmy, że każdy z kątów O_iOO_j jest dopełnieniem do $180°$ kąta dwuściennego przy wspólnej krawędzi ścian, do których sfera wpisana jest styczna w punktach O_i i O_j. Teza zadania jest wtedy równoważna

$$\angle O_1OO_2 + \angle O_1OO_3 + \angle O_1OO_4 + \angle O_2OO_3 + \angle O_2OO_4 + \angle O_3OO_4 > 540°.$$

Wystarczy, jeśli pokażemy, że

$$\angle O_1OO_2 + \angle O_2OO_3 + \angle O_3OO_4 + \angle O_4OO_1 > 360°.$$

Teza wynika natychmiast z dodania stronami tej i dwóch analogicznych równości (dowód tego faktu jest również w artykule z poprzedniego kącika).

Przyjmijmy, że płaszczyzna O_1OO_2 przecina krawędź O_3O_4 w punkcie Q. Otrzymamy

$$\angle O_2OO_3 + \angle O_3OQ > \angle O_2OQ \quad \text{oraz} \quad \angle O_4OQ + \angle O_4OO_1 > \angle O_1OQ.$$

Ponieważ $\angle O_3OQ + \angle O_4OQ = \angle O_3OO_4$, więc dostajemy

$$\angle O_1OO_2 + \angle O_2OO_3 + \angle O_3OO_4 + \angle O_4OO_1 > \angle O_1OO_2 + \angle O_2OQ + \angle O_1OQ = 360°.$$

Dowód optymalności:

Rozważmy dowolny czworokąt wypukły $ABCD'$. Przyjmując, że D jest bardzo blisko punktu D' dochodzimy do wniosku, że kąty dwuścienne przy krawędziach AC i BD są dowolnie bliskie $180°$, a pozostałe kąty dwuścienne są dowolnie bliskie $0°$. To kończy dowód, że $360°$ jest najlepszym oszacowaniem dolnym. Dla uzasadnienia optymalności oszacowania górnego załóżmy, że punkt D' leży wewnątrz trójkąta ABC. Biorąc punkt D bardzo blisko D' stwierdzamy, że kąty dwuścienne przy krawędziach AD, BD, CD są dowolnie bliskie $180°$, a pozostałe kąty dwuścienne są dowolnie bliskie $0°$.

2. *Udowodnić, że w każdym kącie trójściennym miara dowolnego z trzech kątów dwuściennych powiększona o* $180°$ *jest większa od sumy miar pozostałych dwóch kątów dwuściennych.*

Rozwiązanie. Oznaczmy miary danych kątów dwuściennych przez α, β, γ. Rzutując dowolny punkt P leżący wewnątrz tego kąta na płaszczyzny wyznaczone przez ściany tego kąta otrzymamy wypukły kąt bryłowy, którego kąty płaskie są równe dopełnieniom do $180°$ odpowiednich kątów dwuściennych danego kąta bryłowego. Miara każdego z tych kątów płaskich jest mniejsza od sumy miar dwóch pozostałych kątów. Stąd wynika nierówność

$$180° - \alpha < (180° - \beta) + (180° - \gamma)$$

oraz dwie analogiczne. Natychmiast stąd otrzymujemy

$$\beta + \gamma < 180° + \alpha, \quad \gamma + \alpha < 180° + \beta, \quad \alpha + \beta < 180° + \gamma.$$

3. *Udowodnić, że suma kątów dwuściennych wypukłego kąta bryłowego posiadającego* n *ścian jest większa niż* $(n-2) \cdot 180°$*.*

Rozwiązanie. Rzutując dowolny punkt P leżący wewnątrz tego kąta na płaszczyzny wyznaczone przez ściany tego kąta otrzymamy wypukły kąt bryłowy, którego kąty płaskie są równe dopełnieniom do $180°$ odpowiednich kątów dwuściennych danego kąta bryłowego. Jeśli przez s oznaczymy sumę kątów dwuściennych pierwszego kąta, to suma kątów płaskich drugiego kąta będzie równa $n \cdot 180° - s$. Ponadto zachodzi nierówność

$$n \cdot 180° - s < 360°,$$

skąd bezpośrednio wynika teza.

4. *W pewnym wypukłym kącie bryłowym suma kątów płaskich jest równa sumie kątów dwuściennych. Wykazać, że ten kąt jest kątem trójściennym.*

Rozwiązanie. Niech n będzie liczbą ścian danego kąta bryłowego. Wtedy suma kątów dwuściennych jest równa $(n-2)\cdot 180^\circ$ (na mocy zadania 3). Wiadomo również, że suma kątów płaskich dowolnego wypukłego kąta bryłowego jest mniejsza od 360°. Stad i z warunków zadania otrzymujemy nierówność

$$(n-2)\cdot 180^\circ < 360^\circ,$$

skąd natychmiast wynika, że $n < 4$, a zatem dany kąt musi być kątem trójściennym.

Z drugiej strony nietrudno wskazać kąt trójścienny spełniający warunki zadania – np. kąt trójścienny w sześcianie (wszystkie kąty płaskie i dwuścienne są równe 90°).

5. *Wykazać, że jeśli wszystkie kąty płaskie pewnego kąta trójściennego są rozwarte, to wszystkie kąty dwuścienne tego kąta trójściennego również są rozwarte.*

Rozwiązanie. Rozważmy kąt trójścienny $SABC$ o kątach płaskich przy wierzchołku S rozwartych, przy czym punkty A i B są tak wybrane, że $AB \perp CS$. Niech ponadto D będzie rzutem prostokątnym B na SC (czyli D jest też rzutem prostokątnym A na SC). Niech $SA = a$, $SB = b$, $\angle ASD = \alpha$, $\angle BSD = \beta$, $\angle ASB = \gamma$ oraz $\angle ADB = \varphi$. Wtedy $AD = a\sin\alpha$ i $BD = b\sin\beta$. Stosując twierdzenie cosinusów dla trójkątów ABS i ABD mamy

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = a^2\sin^2\alpha + b^2\sin^2\beta - 2ab\sin\alpha\sin\beta\cos\varphi,$$

skąd

$$a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta = 2ab(\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\varphi),$$

zatem $0 > \cos\gamma \geqslant \cos\varphi$, czyli kąt dwuścienny między ścianami ASC i BSC jest rozwarty. Podobnie dowodzimy dla pozostałych par ścian.

6. *Wykazać, że jeśli wszystkie kąty dwuścienne pewnego kąta trójściennego są ostre, to wszystkie kąty płaskie tego kąta trójściennego również są ostre.*

Rozwiązanie. Jeśli zrzutujemy dowolny punkt P wewnątrz tego kąta dwuściennego na płaszczyzny zawierające jego ściany, to otrzymamy kąt dwuścienny, którego kąty płaskie są dopełnieniami do 180° kątów dwuściennych tego pierwszego, zaś kąty dwuścienne są dopełnieniami do 180° kątów płaskich. Teza wynika więc z poprzedniego zadania.

7. (OM 34-III-6) *Wykazać, że jeśli w pewnym czworościanie wszystkie kąty dwuścienne są ostre, to wszystkie ściany tego czworościanu są trójkątami ostrokątnymi.*

Rozwiązanie. Teza natychmiast wynika z zadania 6.

8. (OM 45-I-12) *Wykazać, że sumy przeciwległych kątów dwuściennych czworościanu są równe wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości przeciwległych krawędzi są równe.*
Wsk.: Udowodnić, że sumy długości przeciwległych krawędzi czworościanu są równe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje sfera styczna do wszystkich krawędzi czworościanu.

Rozwiązanie. Przyjmujemy oznaczenie $\angle(XYZ, XYT)$ – kąt dwuścienny między płaszczyznami XYZ i XYT. Rozważmy czworościan $ABCD$. Udowodnimy najpierw, że $AB+CD = BC+AD$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje sfera styczna do krawędzi AB, BC, CD, DA oraz BD.

Dowód. Mamy $AB + CD = BC + AD$ wtedy i tylko wtedy, gdy okręgi wpisane w trójkąty ABD i BCD są styczne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje sfera styczna do krawędzi AB, BC, CD, DA oraz BD.

Teraz dowiedziemy, że jeśli istnieje sfera styczna do krawędzi AB, BC, CD, DA oraz BD, to suma kątów dwuściennych przy krawędziach AB i CD jest równa sumie katów dwuściennych przy krawędziach BC i AD.

Dowód. Załóżmy, że sfera o środku S jest więc styczna do krawędzi AB, BC, CD, DA oraz AC odpowiednio w punktach K, L, M, N oraz O. Czworościan $SKNA$ ma płaszczyznę symetrii wyznaczoną przez krawędź AS i środek krawędzi KN. To oznacza, że

$$\angle(ABD, ADS) = \angle(ABD, ABS) = \alpha.$$

Podobnie dowodzimy, że

$$\angle(ABC, ABS) = \angle(ABC, BCS) = \beta,$$

$$\angle(BCD, BCS) = \angle(BCD, CDS) = \gamma,$$

$$\angle(ADC, CDS) = \angle(ADC, ADS) = \delta.$$

Wystarczy jeszcze zauważyć, że $\angle(ABC, ABD) = \alpha + \beta$, $\angle(CDA, CDB) = \gamma + \delta$, $\angle(BCA, BCD) = \beta + \gamma$ i $\angle(ADB, ADC) = \alpha + \delta$.

Dowód w drugą stronę prowadzimy niewprost. Załóżmy więc, że suma kątów dwuściennych przy krawędziach AB i CD jest równa sumie katów dwuściennych przy krawędziach BC i AD. Rozważmy sferę zawierającą okrąg wpisany w trójkąt ABD i styczną do półprostej $BC^{\rightarrow}$. Częścią wspólną tej sfery z płaszczyzną BCD jest pewien okrąg styczny do krawędzi BD i półprostej $BC^{\rightarrow}$. Załóżmy, że prosta przechodząca przez D i styczna do tego okręgu przecina półprostą $BC^{\rightarrow}$ w punkcie C' (załóżmy bez straty dla ogólności, że $C \in BC'$). Wtedy na mocy poprzednio udowodnionej implikacji mamy

$$\angle(ABC, ABD) - \angle(BC'A, BC'D) = \angle(ADB, ADC') - \angle(C'DA, C'DB).$$

Z drugiej strony na mocy założenia mamy

$$\angle(ABC, ABD) - \angle(BC'A, BC'D) = \angle(ADB, ADC) - \angle(CDA, CDB).$$

Zatem

$$\angle(ADC, ADC') = \angle(ADC, ADB) - \angle(ADC', ADB) = \angle(CDA, CDB) - \angle(C'DA, C'DB) =$$

$$= \angle(CDA, CDB) + \angle(C'DA, C'DC) - 180°.$$

Jednakże jeśli $C \neq C'$, to na mocy zadania 2 otrzymujemy

$$\angle(ADC, ADC') > \angle(CDA, CDB) + \angle(C'DA, C'DC) - 180°.$$

Zatem $C = C'$, co kończy dowód w drugą stronę.

Udowodniliśmy zatem, że $AB + CD = BC + AD$ *wtedy i tylko wtedy, gdy suma miar kątów dwuściennych przy krawędziach* AB *i* CD *jest równa sumie miar kątów dwuściennych przy krawędziach* BC *i* AD. Podobne rozumowanie przeprowadzione dla dwóch innych par przeciwległych krawędzi da nam tezę zadania.

9. *W czworościanie* $ABCD$ *kąty dwuścienne przy krawędziach* AB *i* CD *są równe oraz kąty dwuścienne przy krawędziach* BC *i* AD *są równe. Dowieść, że* $AB = CD$ *i* $BC = AD$.

Rozwiązanie. Wykorzystamy następujący fakt: dwa kąty trójścienne, które mają równe odpowiednie kąty dwuścienne przy ich ramionach, są przystające (w szczególności mają równe odpowiednie kąty płaskie).

Dowód. Biorąc dla obu kątów ich kąty dopełniające stwierdzamy, że wystarczy wykazać, że dwa kąty trójścienne, które mają równe odpowiednie kąty płaskie między ramionami, są przystające. Niech S będzie wierzchołkiem pierwszego z nich, a punkty A, B, C niech leżą na jego ramionach. Niech ponadto S' będzie wierzchołkiem drugiego i na odpowiednich ramionach wybierzmy takie punkty A', B', C', że $SA = SA'$, $SB = SB'$, $SC = SC'$. Stąd i z danych równości kątowych wnosimy, że czworościany $SABC$ i $SA'B'C'$ mają odpowiednie ściany przy wierzchołku S przystające, zatem i one są przystające. To zaś oznacza, że ich kąty trójścienne przy wierzchołku S również są przystające, co kończy dowód faktu.

Korzystając z danego faktu dla czworościanu $ABCD$ wnosimy, że kąty trójścienne $BACD$ i $DCAB$ są przystające, skąd $\angle ABD = \angle BDC$ i $\angle ADB = \angle CBD$. Stąd wniosek, że trójkąty ABD i CDB są przystające, więc $AB = CD$ i $BC = AD$.

10. *W ostrosłupie* $ABCDS$ *zachodzi* $AS = BS = CS = DS$. *Udowodnić, że suma kątów dwuściennych przy krawędziach* AS *i* CS *jest równa sumie kątów dwuściennych przy krawędziach* BS *i* DS.

Rozwiązanie. Niech O będzie spodkiem wysokości tego ostrosłupa poprowadzonej z wierzchołka S. Trójkąty prostokątne ASO, BSO, CSO, DSO są przystające, skąd wniosek, że O jest środkiem okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$.

Zauważmy, że czworościan $ABOS$ jest symetryczny względem płaszczyzny przechodzącej przez krawędź SO i środek krawędzi AB, skąd wynika, że kąty dwuścienne między płaszczyzną ABS i płaszczyznami AOS oraz BOS są równe. Podobny wynik dowodzimy dla płaszczyzn BCS, CDS i DAS, skąd łatwo wynika teza.