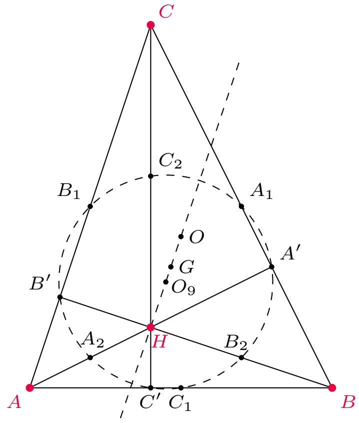
KĄCIK POCZĄTKUJĄCEGO OLIMPIJCZYKA 22

Jego Wysokości, część 2

Bartłomiej BZDĘGA

Przed rozpoczęciem lektury niniejszego kącika warto zapoznać się z poprzednim, w którym zdefiniowany został *układ ortocentryczny* (na rysunku A, B, C, H) oraz jego *spodki* (A', B', C'), *odcinki* (AB, BC, CA, AH, BH, CH) i środki tych odcinków (A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2).

Układ ortocentryczny



Poruszając temat układów ortocentrycznych, byłoby nietaktem pominąć dwa słynne twierdzenia z nimi związane: o *okręgu dziewięciu punktów* i o *prostej Eulera*.

Punkty A_1 i B_1 są środkami boków BC i CA, a punkty A_2 i B_2 – odcinków AH i BH, więc $A_1B_1 \parallel AB \parallel A_2B_2$. Analogicznie dowodzimy, że $A_1B_2 \parallel CH \parallel A_2B_1$. Proste AH i BC są prostopadłe, więc czworokąt $A_1B_1A_2B_2$ jest prostokątem. Z tego wynika, że odcinki A_1A_2 i B_1B_2 są równej długości i mają wspólny środek. To samo można udowodnić dla odcinków B_1B_2 i C_1C_2. Te trzy odcinki – A_1A_2, B_1B_2 i C_1C_2 – są zatem średnicami tego samego okręgu – nazwijmy go o_9. Na okręgu o_9 leży również punkt A', gdyż albo $A' \in \{A_1, A_2\}$, albo $|\sphericalangle A_1A'A_2| = 90°$; analogicznie jest dla punktów B' i C'. Okrąg o_9 to słynny *okrąg dziewięciu punktów* trójkąta ABC.

Trójkąt $A_1B_1C_1$ jest jednokładny do trójkąta ABC w stosunku $-\frac{1}{2}$ względem ich wspólnego środka ciężkości G, zatem opisane na nich okręgi o i o_9 również są jednokładne względem G. Z tego wynika, że punkt G leży na odcinku OO_9 łączącym środki tych okręgów, przy czym $|O_9G| = \frac{1}{2}|OG|$. Co więcej, trójkąt $A_2B_2C_2$ jest jednokładny do trójkąta ABC w stosunku $\frac{1}{2}$ względem punktu H, więc punkt O_9 jest środkiem odcinka OH. Z tego wynika, że punkty H, G i O leżą w tej kolejności na jednej prostej i zachodzi równość $|OH| = 2|OG|$. Nazywamy ją prostą Eulera trójkąta ABC.

Na koniec zauważmy, że w przypadku zdegenerowanego układu ortocentrycznego ($H = C$) zachodzą równości $C = H = A' = B' = C_2$ oraz $A_1 = B_2$ i $A_2 = B_1$. Poza tym, że prostokąt $A_1B_1A_2B_2$ degeneruje się do odcinka, nie dzieje się nic, co mogłoby zaszkodzić przeprowadzonemu wyżej rozumowaniu.

Zadania

1. Udowodnić, że jeśli punkty A, B, C, H tworzą układ ortocentryczny, to:
   (a) okręgi dziewięciu punktów trójkątów ABC, ABH, BCH, CAH pokrywają się (czyli można mówić o okręgu dziewięciu punktów danego układu ortocentrycznego);
   (b) proste Eulera trójkątów ABC, ABH, BCH, CAH mają punkt wspólny.
2. Przy oznaczeniach z rysunku udowodnić, że punkty A_1, B_1, A_2, B_2, C_1, C_2 są środkami sześciu łuków, które na okręgu o_9 wyznaczają punkty A', B' i C'.
3. Przy oznaczeniach z rysunku wykazać, że $|CH| = 2|OC_1|$.
4. Trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD jest równoramienny. Prosta ℓ przechodzi przez środek okręgu opisanego na tym trapezie, jest równoległa do jego podstaw i leży pomiędzy nimi, dwa razy bliżej prostej AB niż prostej CD. Punkt P jest rzutem punktu C na prostą ℓ. Dowieść, że $AP \perp BC$.
5. W równoległoboku $ABCD$ kąt A jest ostry. Punkt K spełnia warunek $\sphericalangle KAD = \sphericalangle KCD = 90°$. Prosta KB przecina odcinek AC w punkcie P. Udowodnić, że punkt P oraz środki odcinków AK, BK, CK leżą na wspólnym okręgu.
6. Odcinki AA', BB' i CC' są wysokościami trójkąta różnobocznego ABC. Niech A^* oznacza punkt przecięcia prostych BC i $B'C'$, analogicznie definiujemy punkty B^* i C^*. Wykazać, że punkty A^*, B^*, C^* leżą na prostej prostopadłej do prostej Eulera trójkąta ABC.

Wskazówki do zadań

1. (a) Spodki i środki odcinków układu ortocentrycznego nie zależą od tego, na który z tych trójkątów spojrzymy najpierw.
(b) Każda z tych czterech prostych przechodzi przez punkt O_9.

2. Punkt H jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $A'B'C'$, a dwusieczne kątów wewnętrznych i zewnętrznych przecinają okrąg opisany na trójkącie w środkach odpowiednich łuków (zob. kącik nr 3).

3. Trójkąty CHG i C_1OG są podobne (kk).

4. Prosta ℓ jest prostą Eulera trójkąta ABC, bo leży na niej środek ciężkości i środek okręgu opisanego na tym trójkącie. Punkt P jest ortocentrum trójkąta ABC, gdyż leży on na jego prostej Eulera oraz na wysokości poprowadzonej z wierzchołka C.

5. Punkty A, B, C, K tworzą układ ortocentryczny, gdyż $AK \perp CB$ i $CK \perp AB$. Rozważyć okrąg dziewięciu punktów tego układu.

6. Potęgi punktu A^* względem okręgów: o, okręgu o średnicy BC oraz o_9 są równe, więc punkt A^* leży na osi potęgowej okręgów o i o_9, czyli prostej prostopadłej do OO_9 (prostej Eulera). Analogicznie postępujemy z punktami B^* i C^*. (O potędze punktu względem okręgu można przeczytać w kąciku nr 11).