Jego Wysokości, część 1

Bartłomiej BZDĘGA

Czwórkę punktów nazywamy *układem ortocentrycznym*, gdy każde dwa z nich wyznaczają prostą prostopadłą do prostej wyznaczonej przez pozostałe dwa.

Powyższa definicja jest konsekwencją pewnego rodzaju równouprawnienia: jeśli punkt H jest ortocentrum nieprostokątnego trójkąta ABC, to każdy z punktów A, B, C, H jest ortocentrum trójkąta wyznaczonego przez trzy pozostałe. Gdy zachodzą dwie z prostopadłości, o których mowa w definicji, to trzecia również – wynika to z tego, że każdy trójkąt ma ortocentrum.

Układy ortocentryczne pojawiają się zatem w naturalny sposób w wielu konfiguracjach geometrycznych. W zadaniu 1 poznajemy kilka własności układów ortocentrycznych, a w zadaniach 2 i 3 uczymy się je rozpoznawać.

Ze względu na wspomniane wcześniej równouprawnienie, spodki wysokości trójkąta ABC możemy nazwać po prostu *spodkami* układu ortocentrycznego A, B, C, H. Są to spodki wysokości każdego z trójkątów: ABC, ABH, AHC, HBC. Punkty A, B, C, H wyznaczają sześć odcinków, które będziemy nazywać *odcinkami* układu ortocentrycznego. Każdy z nich jest średnicą okręgu przechodzącego przez pewne dwa *spodki*, co wynika z odpowiednich prostopadłości. Korzystamy z tego w zadaniach 1(e) oraz 4–6.

Należy jeszcze wspomnieć o *zdegenerowanym układzie ortocentrycznym*. W przypadku trójkąta ABC z kątem prostym przy wierzchołku C mamy $H = C$. Jest oczywiste, że $AH \perp BC$ i $BH \perp AC$, trudno natomiast mówić o prostej CH. Można jednak z całą pewnością stwierdzić, że istnieje prosta prostopadła do AB, na której leżą punkty C i H.

Zadania

1. Udowodnić, że jeśli punkty P, Q, R, S tworzą układ ortocentryczny, to:
   (a) punkt symetryczny do S względem prostej PQ leży na okręgu opisanym na trójkącie PQR;
   (b) okręgi opisane na trójkątach PQR, PQS, PRS i QRS mają równe promienie;
   (c) punkt symetryczny do S względem środka odcinka PQ leży na okręgu opisanym na trójkącie PQR;
   (d) $|PQ|^2 + |RS|^2 = |PR|^2 + |QS|^2 = |PS|^2 + |QR|^2$;
   (e) punkt S jest środkiem okręgu wpisanego lub dopisanego do trójkąta utworzonego przez spodki układu.
2. Udowodnić, że punkty A, B, C, H tworzą układ ortocentryczny, jeśli:
   (a) czworokąty $AZHY$, $BXHZ$ i $CYHX$ są rombami (kolejność wierzchołków niekoniecznie podana antyzegarowo);
   (b) przez punkt H przechodzą trzy okręgi o jednakowych promieniach, a punkty A, B i C są różnymi od H punktami przecięć tych okręgów;
   (c) punkt H jest środkiem okręgu wpisanego w pewien trójkąt, a punkty A, B i C – środkami okręgów dopisanych do niego.
3. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Punkty D, E i F są symetryczne do punktu O względem prostych odpowiednio BC, CA i AB. Dowieść, że punkt O jest ortocentrum trójkąta DEF.
4. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty P i Q są ortocentrami trójkątów odpowiednio ABC i ABD. Udowodnić, że $|CD| = |PQ|$.
5. Skonstruować za pomocą cyrkla i liniału ortocentrum danego trójkąta nieprostokątnego, wykonując tylko sześć ruchów elementarnych (ruch elementarny polega na wykreśleniu odcinka lub łuku).
6. Odcinki AP i BQ są wysokościami trójkąta nieprostokątnego ABC. Punkty R i S są rzutami prostokątnymi punktów odpowiednio A i B na prostą PQ. Udowodnić, że $|PS| = |QR|$.

Wskazówki do zadań

1. (a) Przeprowadzając odpowiedni rachunek na kątach, wykazać, że $|\sphericalangle PSQ| = |\sphericalangle PRQ|$ lub $|\sphericalangle PSQ| + |\sphericalangle PRQ| = 180^\circ$, w zależności od umiejscowienia punktu S względem pozostałych.

(b) Jeśli punkty S i S' są symetryczne względem prostej PQ, to okręgi opisane na trójkątach PQS i PQS' również. Wystarczy skorzystać z poprzedniego podpunktu.

(c) Okręgi wspomniane w poprzednim podpunkcie są również środkowosymetryczne względem środka odcinka PQ.

(d) Najpierw wyznaczamy środek odcinka AB. Okrąg o średnicy AB przecina proste AC i BC w punktach, które są spodkami wysokości trójkąta ABC.

(e) Rozważyć dwa przypadki – punkt S wewnątrz i na zewnątrz trójkąta PQR. Do rachunków na kątach wykorzystać okręgi, o których była mowa we wstępie.

2. (a) Odcinki AY, ZH i BX są równej długości i równoległe, więc czworokąt $ABXY$ jest równoległobokiem. Mamy więc $AB \parallel XY$, ale też $XY \perp CH$.

(b) Skorzystać z poprzedniego podpunktu.

(c) Dwusieczna kąta zewnętrznego trójkąta jest prostopadła do dwusiecznej kąta wewnętrznego przy tym samym wierzchołku.

3. Skorzystać z zadania 2(b).

4. Skorzystać z własności 1(a) i z tego, że każdy trapez wpisany w okrąg jest równoramienny.

5. Najpierw wyznaczamy środek odcinka AB. Okrąg o średnicy AB przecina proste AC i BC w punktach, które są spodkami wysokości trójkąta ABC.

6. Jeśli zrzutujemy prostopadle średnicę okręgu na prostą zawierającą jego cięciwę, to środek rzutu średnicy wypadnie w środku cięciwy.