O problemie sadu bez prześwitów

*Piotr ZARZYCKI**

*Instytut Matematyki, Uniwersytet Gdański

W 1918 roku George Pólya opublikował artykuł *Zahlentheoretisches und wahrscheinlichkeits-theoretisches über die Sichtweite im Walde*, w którym rozważał następujący problem (w literaturze anglojęzycznej nosi on nazwę *Orchard Visibility Problem*):

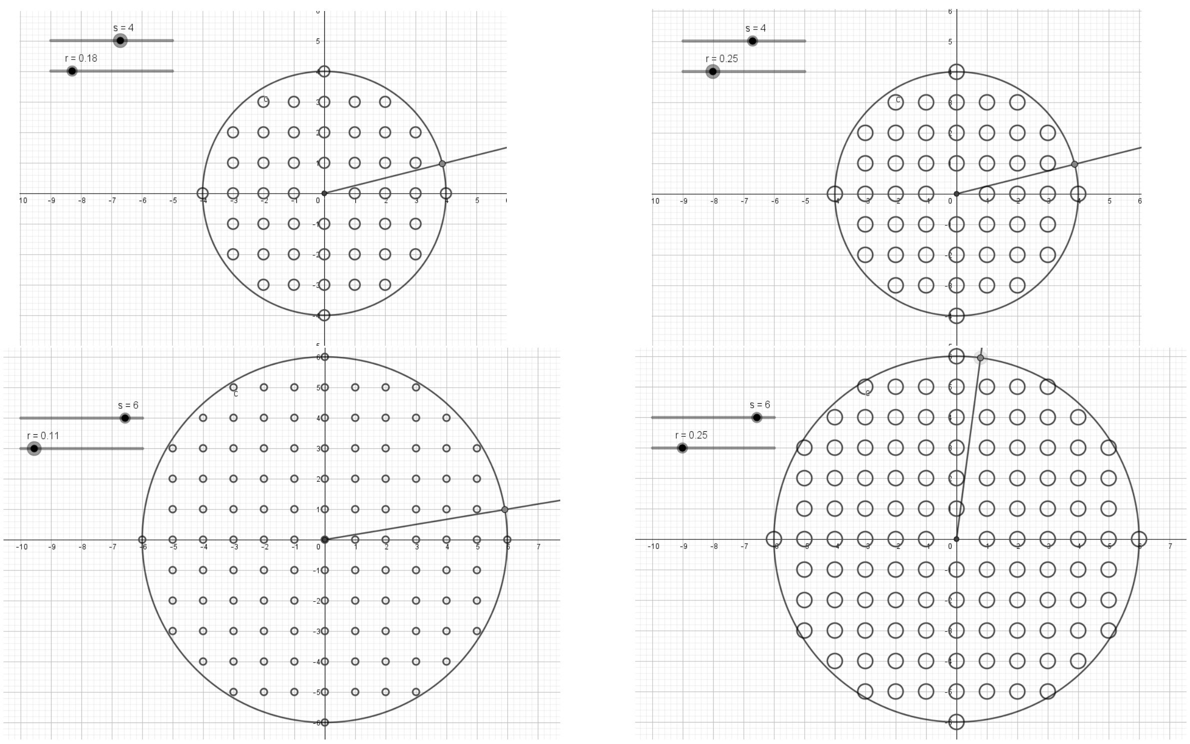
George Pólya, *Zahlentheoretisches und wahrscheinlichkeitstheoretisches über die Sichtweite im Walde*, Arch. Math. und Phys., 27, Series 2 (1918), 135–142.

Sad ma kształt koła o promieniu $s \in \mathbb{N}^+$ i środku w początku układu współrzędnych. W każdym punkcie kratowym tego sadu, oprócz punktu $(0,0)$, posadzono drzewo. Zakładamy, że każde drzewo ma pień, którego przekrój jest kołem o promieniu r. Jakie jest najmniejsze r, dla którego każdy promień wychodzący z punktu $(0,0)$ napotyka na swojej drodze jakieś drzewo? Innymi słowy, dla jakich r, stojąc w punkcie $(0,0)$, nie zobaczymy w tym sadzie żadnych prześwitów?

Eksperymenty

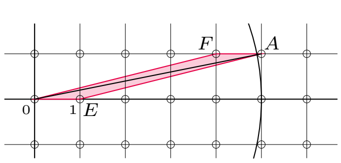
Zadanie Pólya znalazło się we wspaniałym zbiorze zadań George Pólya i Gábora Szegő *Problems and Theorems in Analysis* (vol. 2, chap. 5, Problem 239, Springer-Verlag, New York, 1976). Istnieje przekład rosyjski tej książki, niestety nie ma przekładu polskiego.

W sformułowaniu zadania z cytowanej książki Pólya i Szegő znajduje się oszacowanie dla poszukiwanego najmniejszego r, my jednak rozpoczniemy od eksperymentalnej analizy zagadnienia. Eksperymenty przeprowadzono za pomocą programu GeoGebra, korzystając z dwóch suwaków (dla s oraz dla r). Zamieszczone poniżej zrzuty ekranów dotyczą przypadków, gdy $s = 4$ oraz $s = 6$.



W obu przypadkach minimalny promień r, dla którego jakaś półprosta wychodząca z punktu $(0,0)$ napotka drzewo, jest w przybliżeniu równy $\frac{1}{s}$. Kolejne spostrzeżenie wynika z symetrii. Otóż drzewa w kole położone są symetrycznie względem obu osi układu, więc wystarczy rozpatrzyć I ćwiartkę koła (sadu) i ograniczyć się do drzew o środkach w punktach (x,y), przy czym $x \geqslant y$.

Minimalny promień drzew dla sadu bez prześwitów – łatwiejsza część



Udowodnimy, że jeśli $r < \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$, to sad ma prześwit. Spójrzmy na fragment sadu przedstawiony na marginesie (rozumowanie jest ogólne, ilustrujemy je dla $s = 6$).

Odległość punktów $E = (1,0)$ i $F = (s-1,1)$ od półprostej OA, gdzie $A = (s,1)$, wynosi $\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$, stąd drzewa w punkcie E oraz w punkcie F o promieniu $r < \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$ nie dotykają półprostej OA. Zatem jeśli sad nie ma prześwitów, to $r \geqslant \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$. Uzasadnienie, że promień $\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$ faktycznie jest najmniejszym możliwym, jest już bardziej złożone.

Minimalny promień drzew – trudniejsza część

Zauważmy najpierw, że kluczowe dla rozpatrywanego problemu są drzewa posadzone w punktach (a, b), gdzie a oraz b są względnie pierwsze. Tak rzeczywiście jest, gdyż jeśli $\mathrm{NWD}(a, b) = d > 1$, to drzewo w punkcie $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)$ zasłania drzewo w punkcie (a, b). Przypomnijmy, że prześwity sadu obserwujemy z punktu $(0, 0)$. Rozpatrzmy więc wszystkie punkty w sadzie o współrzędnych względnie pierwszych. Dla $s = 5$ w pierwszej ćwiartce takich punktów jest łącznie trzynaście. Wszystkie te punkty można znaleźć, stosując *algorytm Sterna–Brocota*, który polega na prostej operacji sumowania punktów. Opiszemy go właśnie dla $s = 5$.

Opisana procedura bardzo przypomina algorytm generowania *ułamków Farey'a* ustalonego rzędu.

Rozpoczynamy od pary punktów $(0, 1)$ i $(1, 0)$ (etap I), a następnie na każdym kolejnym etapie pomiędzy dwa sąsiednie punkty z poprzedniego etapu wstawiamy punkt, którego współrzędne to sumy odpowiednich współrzędnych punktów sąsiednich. Popatrzmy na punkty otrzymane w kolejnych etapach tej procedury:

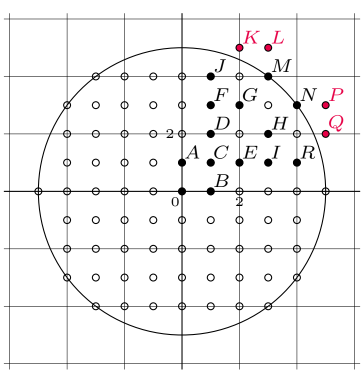
I: $(0, 1)$, $(1, 0)$

II: $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 0)$

III: $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(1, 0)$

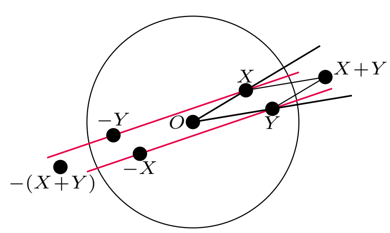
IV: $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(1, 1)$, $(3, 2)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(1, 0)$

V: $(0, 1), (1, 4), (1, 3), (2, 5), (1, 2), (3, 5), (2, 3), (3, 4), (1, 1), (4, 3), (3, 2), (5, 3), (2, 1), (5, 2), (3, 1), (4, 1), (1, 0)$



Zauważmy, że cztery punkty z etapu V nie należą do rozpatrywanego sadu, na rysunku obok zaznaczono je kolorem. 13 kluczowych dla naszego problemu punktów ma kolor **czarny**, pozostałe punkty są nieistotne. Otrzymane za pomocą algorytmu Sterna–Brocota na każdym etapie punkty mają ważne, łatwe do udowodnienia własności:
(♠) *jeśli punkty (a, b) oraz (c, d) są sąsiednie, to $bc - ad = 1$;*
(♣) *punkty (a, b) w odniesieniu do ilorazu a/b są uporządkowane rosnąco, co oznacza także, że kąt, jaki tworzy półprosta łącząca $(0, 0)$ i (a, b) z dodatnią półosią OX, maleje.*

Rozpatrzmy parę sąsiednich punktów na jakimś etapie procedury Sterna–Brocota, które leżą w kole o promieniu s (nazwijmy te punkty X, Y), oraz takich, że punkt $X + Y$ leży poza tym kołem. Na rysunku takimi punktami są na przykład $E = (2, 1)$, $I = (3, 1)$, punkt $E + I = (5, 2) = Q$ leży na zewnątrz koła. Czwórka punktów $(O, X, Y, X + Y)$ tworzy równoległobok bez punktów kratowych wewnątrz. Kluczowe dla dalszych rozumowań jest poniższe twierdzenie.

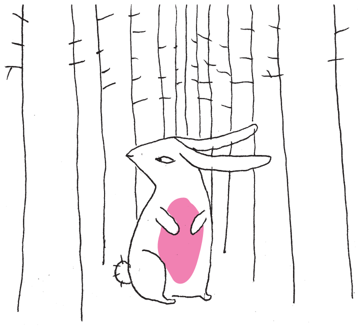


Twierdzenie. *Niech $(O, X, Y, X + Y)$ będzie czwórką punktów opisaną powyżej, przy czym $|X + Y|$, czyli odległość punktu $X + Y$ od punktu O, jest najmniejszą możliwą. Wówczas sad z drzewami o promieniu r nie ma prześwitów wtedy i tylko wtedy, gdy $r \geqslant \frac{1}{|X+Y|}$.*

Dowód. Spójrzmy na rysunek na marginesie. Jeżeli pomiędzy drzewami znajdującymi się w punktach X i Y jest prześwit, to pomiędzy nimi będzie widoczne drzewo w punkcie $X + Y$. Ponieważ $X + Y$ znajduje się poza sadem, oznacza to, że nie możemy dopuścić do tego prześwitu. Zauważmy najpierw, że odległość punktów X, Y od prostej łączącej O z $X + Y$ wynosi $\frac{1}{|X+Y|}$. Wynika to z tego, że pole równoległoboku $O, X, Y, X + Y$ jest równe 1 (własność ♠). Ponadto z własności ♣ wynika, że w wycinku SOT rozpatrywanego koła nie ma punktów kratowych. Zatem jeśli $r < \frac{1}{|X+Y|}$, to półprosta łącząca O z $X + Y$ nie napotyka w sadzie żadnego drzewa.

Załóżmy teraz, że $r \geqslant \frac{1}{|X+Y|}$. Pokażemy, że w sadzie w pasie między zaznaczonymi kolorem prostymi nie ma żadnych punktów kratowych o współrzędnych względnie pierwszych. Niech $X = (a, b)$ oraz $X + Y = (c, d)$. Obie proste w kolorze są równoległe do prostej łączącej O z $X + Y$, zatem równania kolorowych prostych są postaci:

$$y_{\text{górna}} = \frac{d}{c} \cdot x + \frac{bc - ad}{c}, \qquad y_{\text{dolna}} = \frac{d}{c} \cdot x + \frac{ad - bc}{c}.$$



Stąd jeśli punkt kratowy (x, y) leży w rozpatrywanym zbiorze, to otrzymujemy:

$$\frac{d}{c}\cdot x + \frac{ad-bc}{c} < y < \frac{d}{c}\cdot x + \frac{bc-ad}{c}, \qquad ad-bc < cy-dx < bc-ad.$$

Zatem $cy - dx = 0$, czyli punkt (x, y) o współrzędnych względnie pierwszych leży na prostej łączącej O z $X+Y$, ale jedynym takim punktem z „listy” Brocota–Sterna jest punkt $X+Y$.

Z nierówności $r \geqslant \frac{1}{|X+Y|}$ wynika, że prosta łącząca O z $X+Y$ nie może ominąć drzewa w punkcie X ani Y. Jeśli weźmiemy inną czwórkę punktów $O, P, Q, P+Q$, przy czym punkty P, Q leżą w sadzie i każdy z nich ma współrzędne względnie pierwsze oraz punkt $P+Q$ leży na zewnątrz sadu, to $|P+Q| \geqslant |X+Y|$ oraz $\frac{1}{|P+Q|} \leqslant \frac{1}{|X+Y|}$. Jeśli weźmiemy promień drzewa równy $\frac{1}{|X+Y|}$, to prosta łącząca O z $P+Q$ nie ominie punktu P ani Q. $\square$

Możemy teraz postawić kropkę nad i – znaleźć minimalny promień drzew dla sadu bez prześwitów. Z twierdzenia wynika, że dla dowolnej liczby całkowitej s ten minimalny promień oblicza się ze wzoru

$$r_{\min} = 1/\min\{\sqrt{a^2+b^2} : a, b \in \mathbb{Z}, \sqrt{a^2+b^2} > s\}.$$

Oczywiście $s^2 + 1^2 = s^2 + 1 > s^2$, więc $r_{\min} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$.

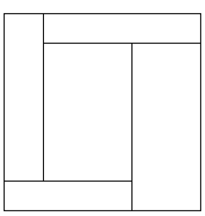
Uwagi końcowe

W pracy *The orchard visibility problem and some variants* (Journal of Computer and System Sciences, 74 (2008), 587–597) Clyde P. Kruskal rozpatrzył problem sadu bez prześwitów w przypadku, gdy promień sadu nie jest liczbą całkowitą. W pracy tej pojawiają się również pytania dotyczące sadów i drzew rosnących w punktach sieciowych dla regularnych sieci trójkątnych i sześciokątnych.

Zadania

Przygotował Łukasz RAJKOWSKI

M 1645. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ istnieją nieparzyste liczby x_n, y_n spełniające równanie $7x_n^2 + y_n^2 = 2^n$.
Rozwiązanie na str. 16



M 1646. Kwadrat podzielono liniami równoległymi do jego boków na 5 prostokątów, jak na rysunku obok. Udowodnić, że jeśli zewnętrzne prostokąty mają równe pola, to wewnętrzny prostokąt jest kwadratem.
Rozwiązanie na str. 1

M 1647. Niech $P(x)$ będzie wielomianem n-tego stopnia $(n \geqslant 5)$ o współczynnikach całkowitych, mającym n różnych pierwiastków całkowitych. Załóżmy, że 0 jest jednym z jego pierwiastków. Udowodnić, że wielomian $P(P(x))$ również ma dokładnie n różnych pierwiastków całkowitych.
Rozwiązanie na str. 2

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1005. Jak szybko temperatura powietrza maleje z wysokością nad powierzchnią Ziemi w pogodny, suchy i bezwietrzny dzień? Średnia masa molowa powietrza $\mu = 28{,}96$ g, przyspieszenie ziemskie $g = 9{,}81$ m/s^2, stała gazowa $R = 8{,}314$ J/(mol $\cdot$ K). W rozważanych warunkach powietrze spełnia równanie stanu gazu doskonałego.
Rozwiązanie na str. 10

F 1006. W „oku cyklonu” ciśnienie powietrza spada znacznie poniżej normalnego ciśnienia atmosferycznego $p_0 = 1013$ hPa, ale panuje tam przeważnie spokojna, bezwietrzna pogoda. Na zewnątrz tego obszaru, w promieniu do kilkuset kilometrów, wieją bardzo gwałtowne wiatry. Oko cyklonu Wilma w październiku 2005 roku miało promień około 2 km, panowało w nim ciśnienie 882 hPa, a silne wiatry występowały do 260 km od centrum. Oszacuj prędkość wiatru wokół oka tego cyklonu. Przyjmij, że gęstość powietrza $\rho = 1{,}2$ kg/m^3.
Rozwiązanie na str. 18