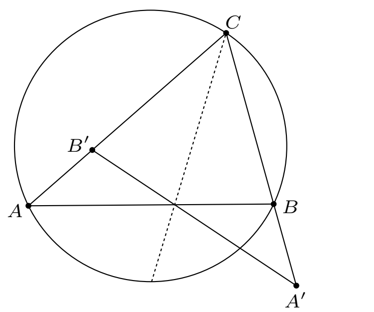
Składanie inwersji z symetrią

Michał KIEZA

Inwersja jest bardzo pożytecznym przekształceniem, które ma szerokie zastosowanie w zadaniach związanych z okręgami. W wielu z nich opłaca się stosować ją w taki sposób, aby nie mnożyć punktów – innymi słowy tak dobrać promień inwersji, aby obrazy interesujących nas punktów wypadały w innych punktach rozważanej konfiguracji. Zdarza się jednak, że do uzyskania tego efektu potrzebujemy dodatkowo złożyć inwersję z symetrią.

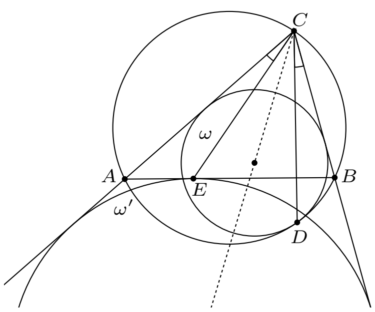
Rozważmy mianowicie trójkąt ABC wpisany w okrąg o. Jeśli zastosujemy inwersję o środku w punkcie C (i przez A' i B' oznaczymy obrazy, odpowiednio, punktów A i B), to otrzymamy trójkąt $A'B'C$, który będzie podobny do trójkąta BAC. Jeśli promień inwersji będzie równy $\sqrt{CA \cdot CB}$, to trójkąt $A'B'C$ będzie przystający do trójkąta ABC (rys. 1). Znacznie lepszym podejściem jest rozważenie złożenia inwersji o środku C i promieniu $\sqrt{CA \cdot CB}$ z symetrią względem dwusiecznej kąta ACB. Przekształcenie to, podobnie jak inwersja, jest inwolucją, czyli złożone same z sobą daje identyczność. W takim razie zamienia ono każdy obiekt z jego obrazem. W szczególności przekształcenie to zamienia punkty A i B, półproste $CA^{\to}$ i $CB^{\to}$ oraz wymienia prostą AB z okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Ponadto posiada ono wszystkie własności inwersji – np. zachowuje kąty. Przekonajmy się o jego przydatności na kilku przykładach.



Rys. 1

Zadanie 1. *Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg o. Okrąg ω jest styczny do odcinków AC i BC oraz do okręgu o w punkcie D. Okrąg ω' zaś jest dopisany do trójkąta ABC i styczny do boku AB w punkcie E. Wykazać, że $\sphericalangle ACE = \sphericalangle BCD$.*

Rozwiązanie. Rozważmy przekształcenie będące złożeniem inwersji o środku C i promieniu $\sqrt{CA \cdot CB}$ z symetrią względem dwusiecznej kąta ACB (rys. 2). Przekształcenie to zamienia półproste $CA^{\to}$ i $CB^{\to}$ oraz prostą AB z okręgiem o. W takim razie okrąg ω przejdzie na okrąg styczny do prostej AB i półprostych $CA^{\to}$ i $CB^{\to}$, czyli na okrąg ω'. Stąd wniosek, że obrazem punktu D jest punkt E. Półprosta $CD^{\to}$ przejdzie więc na półprostą $CE^{\to}$, a skoro inwersja zachowuje kąty, to $\sphericalangle BCD = \sphericalangle ACE$.



Rys. 2

Zadanie 2. *Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, zaś o jest okręgiem opisanym na tym trójkącie. Okrąg ω styczny do odcinków AC, BC jest styczny do okręgu o w punkcie P, a S jest środkiem tego łuku AB okręgu o, na którym leży punkt C. Wykazać, że punkty P, I, S są współliniowe.*

Rozwiązanie. Jeśli $AC = BC$, to punkty C i S pokrywają się i punkty P, I, S leżą na dwusiecznej CI. Dalej zakładamy, że $AC \neq BC$. Wówczas punkty C i S są różne, zaś proste CS i AB nie są równoległe. Rozważmy złożenie inwersji o środku C i promieniu $\sqrt{CA \cdot CB}$ z symetrią względem dwusiecznej kąta ACB (rys. 3). Przekształcenie to zamienia półproste $CA^{\to}$ i $CB^{\to}$ oraz prostą AB z okręgiem o. Tak jak w poprzednim zadaniu uzasadniamy, że obrazem okręgu ω jest okrąg dopisany do trójkąta ABC styczny do boku AB w punkcie P', który jest obrazem punktu P w tym przekształceniu. Ponieważ CS jest dwusieczną kąta zewnętrznego przy wierzchołku C trójkąta ABC, to proste CS i CI są prostopadłe. W takim razie obrazem punktu S jest punkt S' przecięcia prostej CS (która jest swoim własnym obrazem) z prostą AB (która jest obrazem okręgu o). Niech I' będzie obrazem punktu I. Wtedy z definicji inwersji mamy

$$CI \cdot CI' = CA \cdot CB,$$

czyli

$$\frac{CI}{CA} = \frac{CB}{CI'}.$$

Z powyższego i z równości $\sphericalangle ACI = \sphericalangle I'CB$ (bo inwersja zachowuje kąty) otrzymujemy, że trójkąty ACI i $I'CB$ są podobne. W takim razie

Rozwiązanie zadania M 1635.
Odpowiedź: $2n-1$.

Podzielmy dany kwadrat $n \times n$ na n^2 kwadratów jednostkowych, zwanych dalej *polami*, i wyróżnijmy pola znajdujące się na przecięciach wierszy i kolumn o parzystych numerach. Takich pól jest $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$.

Zauważmy, że każdy parzysty prostokąt o wymiarach $2a \times 2b$, a więc o polu $4ab$, zawiera dokładnie ab wyróżnionych pól. Wobec tego łączne pole części podziału będących parzystymi prostokątami jest równe co najwyżej $4\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 = (n-1)^2$. Łączne pole kwadratów jednostkowych jest zatem równe co najmniej $n^2-(n-1)^2 = 2n-1$, skąd wniosek, że jest co najmniej tyle takich kwadratów.

Wystarczy zauważyć, że podział, w którym otrzymujemy $2n-1$ kwadratów jednostkowych, jest możliwy – wystarczy wyciąć kwadrat o boku $n-1$, a pozostałą część podzielić na kwadraty jednostkowe.

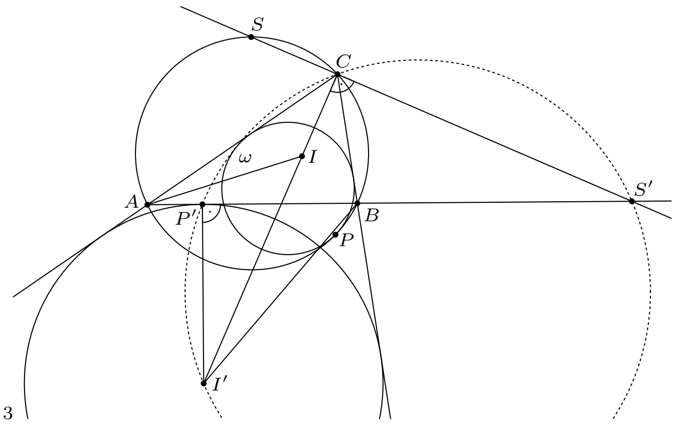
$\sphericalangle AIC = \sphericalangle I'BC$. Ponieważ $\sphericalangle AIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle ABC$, to mamy

$$90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ABI',$$

skąd

$$\sphericalangle ABI' = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle ABC.$$

Zatem BI' jest dwusieczną kąta zewnętrznego przy wierzchołku B trójkąta ABC, więc I' jest środkiem okręgu dopisanego do trójkąta ABC. W takim razie $\sphericalangle S'P'I' = 90^\circ$, co wraz z równością $\sphericalangle S'CI' = 90^\circ$ (bo $CS \perp CI$) oznacza, że punkty P', I', S' i C leżą na jednym okręgu. To zaś jest równoważne z tym, że punkty P, I, S są współliniowe.



Rys. 3

Zadanie 3. *Okrąg o środku I jest wpisany w trójkąt ABC. Okrąg ω styczny do okręgu opisanego na trójkącie ABC jest styczny do odcinków AC i BC odpowiednio w punktach D i E. Wykazać, że punkt I leży na odcinku DE.*

Rozwiązanie. Niech $BC=a$, $AC=b$, p to połowa obwodu trójkąta ABC, γ to miara kąta ACB, zaś r to promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Inwersja o środku C i promieniu $\sqrt{CA \cdot CB}$ złożona z symetrią względem dwusiecznej kąta ACB przeprowadza okrąg ω na okrąg dopisany do trójkąta ABC styczny do boku AB w punkcie F, a punkty D i E odpowiednio na punkty $D' \in CB$ i $E' \in AC$ (rys. 4). Ponieważ $AE' = AF$ i $BD' = BF$, to

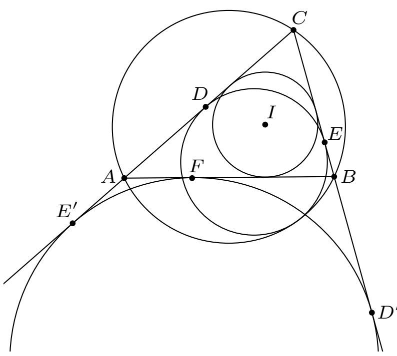
$$CD' + CE' = AC + AF + BF + BC = 2p,$$

co wraz z równością $CD' = CE'$ prowadzi do wniosku, że $CD' = p$. Z drugiej strony z definicji inwersji mamy

$$CD \cdot CD' = AC \cdot BC,$$

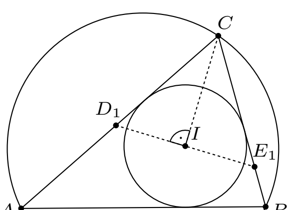
zatem

$$CD = \frac{ab}{p} = \frac{2S_{ABC}}{p\sin\gamma} = \frac{2r}{\sin\gamma}.$$



Rys. 4

Przyjmijmy teraz, że prosta przechodząca przez I i prostopadła do prostej CI przecina boki AC i BC odpowiednio w punktach D_1 i E_1 (rys. 5). Skoro $D_1I = E_1I$, to odległość punktu D_1 od prostej BC jest równa $2r$, skąd wniosek, że $CD_1 = \frac{2r}{\sin\gamma} = CD$, czyli $D_1 = D$. Analogicznie uzasadnimy, że $E_1 = E$, więc punkt I leży na odcinku DE.



Rys. 5

Oprócz składania inwersji z symetrią osiową możemy także złożyć inwersję z symetrią środkową (o środku w środku inwersji). Zobaczmy to na poniższym przykładzie.

Zadanie 4. *Trójkąt różnoboczny ABC jest wpisany w okrąg o. Punkty D, E, F są środkami łuków BC, CA, AB niezawierających pozostałych wierzchołków trójkąta. Punkty D', E', F' są symetryczne do punktów D, E, F odpowiednio względem boków BC, CA, AB. Wykazać, że punkty D, E, F oraz ortocentrum trójkąta ABC leżą na jednym okręgu.*

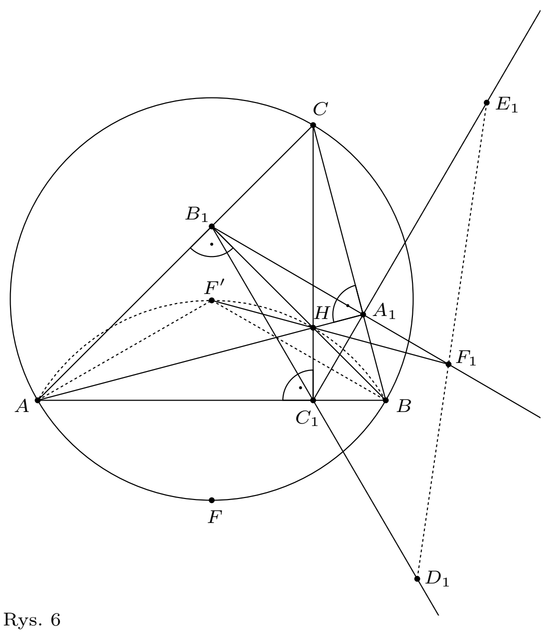
Rozwiązanie. Niech A_1, B_1 i C_1 będą spodkami wysokości trójkąta ABC poprowadzonymi odpowiednio z wierzchołków A, B, C. Ponieważ na czworokątach ABA_1B_1 i BCB_1C_1 można opisać okręgi, to

$$AH \cdot A_1H = BH \cdot B_1H = CH \cdot C_1H = r^2.$$

Rozważmy inwersję o środku H i promieniu r złożoną z symetrią środkową względem punktu H (rys. 6). Obrazami punktów A, B, C są zatem punkty A_1, B_1, C_1. Ponieważ

$$\sphericalangle AF'B = \sphericalangle AFB = 180^\circ - \sphericalangle ACB = \sphericalangle AHB,$$

to punkty A, F', H, B leżą na jednym okręgu, który w rozważanym przekształceniu przechodzi na prostą A_1B_1. Obrazem punktu F' jest punkt F_1 przecięcia prostych $F'H$ i A_1B_1. Analogicznie stwierdzamy, że w tym przekształceniu punkt D' przechodzi na punkt D_1 przecięcia prostych $D'H$ i B_1C_1, a punkt E' przechodzi na punkt E_1 przecięcia prostych $E'H$ i C_1A_1.



Rys. 6

Wystarczy udowodnić, że punkty D_1, E_1, F_1 leżą na jednej prostej. Stosując twierdzenie Menelausa dla trójkąta $A_1B_1C_1$, widzimy, że wystarczy wykazać, że

$$(*) \qquad \frac{A_1F_1}{B_1F_1} \cdot \frac{B_1D_1}{C_1D_1} \cdot \frac{C_1E_1}{A_1E_1} = 1.$$

Wykorzystując wzór na odległość obrazów inwersyjnych, otrzymujemy

$$A_1F_1 = AF' \cdot \frac{r^2}{HF' \cdot HA} \quad \text{oraz} \quad B_1F_1 = BF' \cdot \frac{r^2}{HF' \cdot HB}.$$

Uwzględniając równość $AF' = BF'$, widzimy, że

$$\frac{A_1F_1}{B_1F_1} = \frac{HB}{HA}.$$

Analogicznie uzasadniamy, że

$$\frac{B_1D_1}{C_1D_1} = \frac{HC}{HB} \quad \text{oraz} \quad \frac{C_1E_1}{A_1E_1} = \frac{HA}{HC}.$$

Mnożąc te trzy równości stronami, dostajemy $(*)$, co kończy rozwiązanie.

Na koniec artykułu zostawiamy kilka zadań dla Czytelników.

Zadanie 5. *Okrąg ω wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku AB w punkcie D. Okrąg ω' jest styczny do półprostych $CA^{\rightarrow}$ i $CB^{\rightarrow}$ oraz jest styczny zewnętrznie w punkcie E do okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wykazać, że $\sphericalangle ACE = \sphericalangle BCD$.*

Zadanie 6. *Trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD jest wpisany w okrąg o_1. Okrąg o_2 jest styczny do odcinków BC i CA oraz jest styczny wewnętrznie do okręgu o_1 w punkcie F. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do odcinka AB w punkcie E. Dowieść, że punkty D, E, F leżą na jednej prostej.*

Zadanie 7. *Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB > AC$. Punkty B_0 i C_0 są odpowiednio środkami boków CA i CB, a punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A. Okrąg przechodzący przez punkty B_0 i C_0 jest styczny do okręgu opisanego na trójkącie ABC w punkcie E różnym od A. Udowodnić, że środek ciężkości trójkąta ABC leży na prostej DE.*

Zadanie 8. *Okrąg o_1 jest styczny do boków AC i BC trójkąta ABC oraz do okręgu opisanego na tym trójkącie w punkcie P. Okrąg o_2 jest styczny do półprostych $CA^{\rightarrow}$ i $CB^{\rightarrow}$ oraz jest styczny zewnętrznie do okręgu opisanego na trójkącie ABC w punkcie Q. Wykazać, że*

$$\frac{AP \cdot AQ}{BP \cdot BQ} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2.$$

Zadanie 9. *Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg ω. Prosta ℓ jest równoległa do prostej BC i przecina odcinki AB i AC odpowiednio w punktach D i E, a okrąg ω w punktach K i L (gdzie D leży między punktami K i E). Okrąg o_1 jest styczny do odcinków DK i BD oraz do okręgu o; okrąg o_2 jest styczny do odcinków EL i CE oraz do okręgu o. Wyznaczyć miejsce geometryczne punktów przecięcia wspólnych stycznych wewnętrznych okręgów o_1 i o_2, przy zmieniającym się położeniu prostej ℓ.*

Rozwiązanie zadania F 998.
Prędkość graniczna v osiągana jest, gdy siła oporu zrównuje się z ciężarem ciała:

$$mg = kSv^2,$$

gdzie m jest masą ciała, a g przyspieszeniem ziemskim. Dla kuli o promieniu R masa m jest proporcjonalna do iloczynu ρR^3, a pole przekroju poprzecznego do R^2. Dla kul z tego samego materiału otrzymujemy więc:

$$\frac{v_1}{v_2} \propto \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{1/6},$$

a dla kul o tych samych rozmiarach (promieniach):

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\rho_1\rho_2}.$$

a) Kula cięższa (o większym promieniu) osiągnie prędkość $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ razy większą niż kulka lżejsza; b) Kula z materiału o większej gęstości (cięższa) osiągnie prędkość $2\sqrt{2} \approx 2{,}82$ razy większą niż kulka lżejsza.