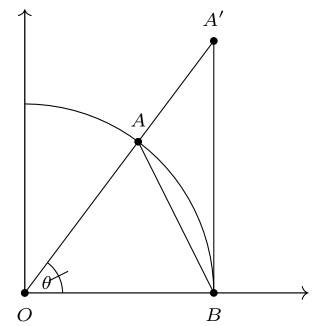
O nierówności między średnią arytmetyczną sinusa i tangensa kąta ostrego a jego miarą

*Wojciech Wilhelm WDOWIK**

*Student, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński

Celem tego artykułu jest wykazanie prawdziwości nierówności $2\theta < \sin\theta + \operatorname{tg}\theta$ dla dowolnego kąta ostrego θ. Podaną nierówność można łatwo udowodnić, używając rachunku różniczkowego. Można jednak zadać pytanie: czy da się tego uniknąć, czy można ją wykazać krócej, używając przy tym jedynie elementarnej geometrii. Okazuje się, że tak.

Rozważmy okrąg jednostkowy o środku w początku O układu współrzędnych i ustalmy dowolny kąt $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Niech $B = (1, 0)$ i obierzmy taki punkt A leżący na okręgu jednostkowym w pierwszej ćwiartce, że $|\sphericalangle AOB| = \theta$; na półprostej OA tak obierzmy zaś punkt A', aby trójkąt $\triangle A'OB$ był prostokątny, o kącie prostym $\sphericalangle OBA'$. Zostało to przedstawione na rysunku 1.



Rys. 1

Łatwo można dostrzec, że

$$\text{pole trójkąta } AOB < \text{pole wycinka kołowego } AOB < \text{pole trójkąta } A'OB.$$

Obliczmy teraz kolejno pola wymienionych figur. Po pierwsze zachodzi

$$\text{pole trójkąta } AOB = \frac{1}{2}|AO||OB| \sin\sphericalangle AOB = \frac{\sin\theta}{2}.$$

Znany jest także wzór na pole wycinka kołowego o danej rozwartości, który mówi, iż

$$\text{pole wycinka kołowego } AOB = \frac{\theta}{2}.$$

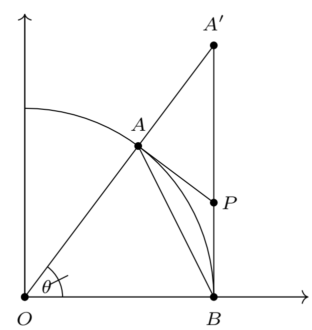
Ponieważ zachodzi równość $|BA'| = \frac{|BA'|}{|OB|} = \operatorname{tg}\theta$, to

$$\text{pole trójkąta } A'OB = \frac{1}{2}|OB||BA'| = \frac{\operatorname{tg}\theta}{2}.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób geometryczny dowód związku między wartościami funkcji trygonometrycznych kąta ostrego a jego miarą.

Twierdzenie. Dla dowolnej liczby $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ zachodzi nierówność

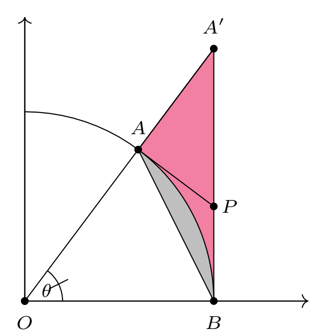
$$\sin\theta < \theta < \operatorname{tg}\theta.$$



Rys. 2

Wykorzystane w dowodzie powyższego twierdzenia geometryczne konstrukcje przydadzą się nam do wykazania podanej we wstępie nierówności. Poprowadźmy styczną w punkcie A do okręgu, przecinającą odcinek BA' w punkcie P (rys. 2).

Z twierdzenia o odcinkach stycznych do okręgu wiemy, iż $|AP| = |BP|$. Odcinek PA' jest przeciwprostokątną trójkąta $\triangle APA'$, odcinek AP jest zaś jego przyprostokątną, zatem $|AP| < |PA'|$. Z powyższych własności wynika, że $|BP| < |PA'|$.



Rys. 3

Rozważmy teraz trójkąty APA' i BPA. Mają one tę samą wysokość opuszczoną na prostą BA', skoro zaś podstawa tego pierwszego jest dłuższa od podstawy drugiego, to

$$\text{pole trójkąta } BPA < \text{pole trójkąta } APA'.$$

Wiemy już, polami czego są wielkości $\frac{\sin\theta}{2}, \frac{\theta}{2}, \frac{\operatorname{tg}\theta}{2}$. Spójrzmy więc na rysunek 3, na którym na szaro zaznaczono figurę o polu $\frac{\theta}{2} - \frac{\sin\theta}{2}$, kolorem zaś figurę o polu $\frac{\operatorname{tg}\theta}{2} - \frac{\theta}{2}$.

Łatwo zauważyć, że

$$\frac{\theta}{2} - \frac{\sin\theta}{2} < \text{pole trójkąta } BPA < \text{pole trójkąta } APA' < \frac{\operatorname{tg}\theta}{2} - \frac{\theta}{2}.$$

Udowodniliśmy tym samym następującą zależność.

Twierdzenie. Dla dowolnej liczby $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ zachodzi nierówność

$$2\theta < \sin\theta + \operatorname{tg}\theta.$$