Czworokąty bliźniacze

*Stanisław HAUKE**

*zdobywca złotego medalu w XL Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki im. Pawła Domańskiego

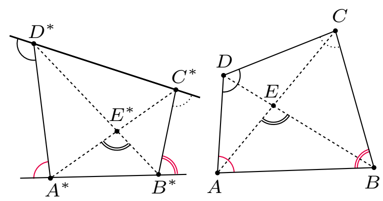
Przypuśćmy, że dane mamy dwa czworokąty wypukłe $ABCD$ i $A^*B^*C^*D^*$ takie, że każdemu bokowi jednego odpowiada pewien równoległy doń bok drugiego, a każdej przekątnej – równoległa przekątna. Na pierwszy rzut oka wydawać by się mogło, że takie czworokąty muszą być podobne, jest jednak druga możliwość – wówczas czworokąty te są *bliźniacze*. Dokładna definicja tego określenia jest następująca: czworokąty wypukłe $ABCD$ i $A^*B^*C^*D^*$ nazwiemy bliźniaczymi, jeśli spełnione są dwa warunki:

$$\sphericalangle A + \sphericalangle A^* = \sphericalangle B + \sphericalangle B^* = \sphericalangle C + \sphericalangle C^* = \sphericalangle D + \sphericalangle D^* = 180^\circ$$

oraz

$$\sphericalangle A^*E^*B^* = \sphericalangle AEB,$$

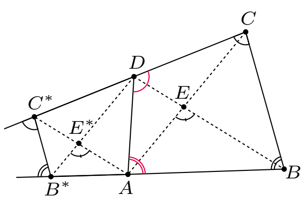
gdzie punkty E i E^* są odpowiednio przecięciami prostych AC i BD oraz A^*C^* i B^*D^* (rys. 1). Wówczas będziemy pisać $ABCD \approx A^*B^*C^*D^*$. Taka definicja par czworokątów bliźniaczych jest „porządna", to znaczy: dla każdego czworokąta wypukłego W istnieje dokładnie jeden, z dokładnością do podobieństwa, czworokąt do niego bliźniaczy W^*. Dodatkowo czworokąt bliźniaczy do czworokąta W^* to po prostu czworokąt W.



Rys. 1

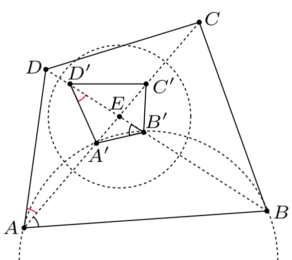
Spójrzmy na dwie konstrukcje czworokąta bliźniaczego dla danego czworokąta $ABCD$.

Konstrukcja 1. Niech B^* będzie punktem przecięcia prostej AB i prostej równoległej do prostej AC, przechodzącej przez punkt D, zaś C^* niech będzie punktem przecięcia prostej CD i prostej równoległej do prostej BD, przechodzącej przez punkt A (rys. 2). Wówczas $AB^*C^*D \approx ABCD$.



Rys. 2

Konstrukcja 2. Rozważmy inwersję o środku w punkcie przecięcia przekątnych AC i BD. Niech obrazami punktów A, B, C, D w tej inwersji będą odpowiednio punkty A^*, B^*, C^*, D^* (rys. 3). Wówczas $A^*B^*C^*D^* \approx ABCD$.



Rys. 3

Sprawdzenie, wprost z definicji, że powyższe pary czworokątów są istotnie bliźniacze, pozostawiamy Czytelnikowi.

W geometrii rozważane są przeróżne układy współrzędnych. Układ współrzędnych kartezjańskich, przypisanie punktom płaszczyzny liczb zespolonych, ale też układy odniesienia względem trójkąta: współrzędne barycentryczne czy trzyliniowe (wyrażające stosunki odległości punktu od boków ustalonego trójkąta). My będziemy rozważać jeszcze inny układ współrzędnych, w odniesieniu do czworokąta. Niech dany będzie czworokąt $ABCD$ oraz punkt P, wtedy *współrzędnymi kątowymi punktu* P *względem czworokąta* $ABCD$ nazwiemy czwórkę:

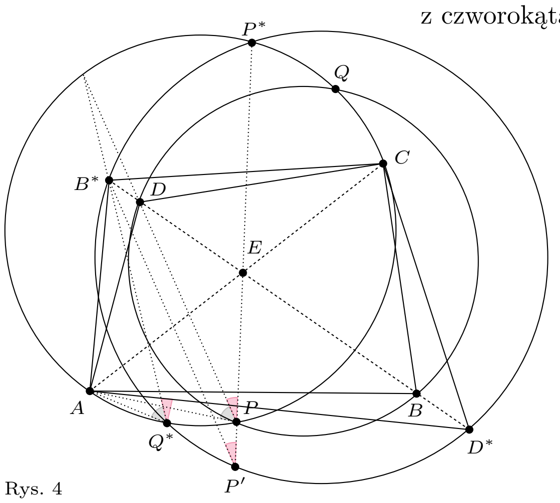
$$wk(P, ABCD) = (\sphericalangle APB, \sphericalangle BPC, \sphericalangle CPD, \sphericalangle DPA).$$

Okazuje się, że tak zdefiniowane współrzędne kątowe mają wiele wspólnego z czworokątami bliźniaczymi. Dokładniej mówi o tym następujące twierdzenie.

Antyinwersja AI^t_E to złożenie inwersji I^t_E z symetrią środkową względem punktu E.

Twierdzenie 1. Jeśli $ABCD \approx A^*B^*C^*D^*$, to dla każdego punktu P istnieje taki punkt $P^\diamond$, że $wk(P, ABCD) = wk(P^\diamond, C^*D^*A^*B^*)$.

Dowód. Rozważmy antyinwersję AI^t_E, gdzie $t = AE \cdot CE$. Łatwo zauważyć, że $AI^t_E(C) = A$ oraz $AI^t_E(A) = C$. Oznaczmy $AI^t_E(B) = B^*$, $AI^t_E(D) = D^*$ oraz $AI^t_E(P) = P^*$ (rys. 4). Na mocy prawdziwości Konstrukcji 2 czworokąty $ABCD$ i CB^*AD^* są bliźniacze. Niech ω_1 i ω_2 będą odpowiednio okręgami opisanymi na trójkątach ΔACP i ΔBDP, niech punkt Q będzie drugim przecięciem okręgów ω_1 i ω_2. Wykażę, że szukanym punktem $P^\diamond$ jest punkt $AI^t_E(Q) = Q^*$.



Rys. 4

Wystarczy uzasadnić, że

$$\sphericalangle DPA = \sphericalangle B^*Q^*A, \tag{1}$$

gdyż pozostałe do sprawdzenia równości są analogiczne. Ponieważ $PE \cdot EP^* = QE \cdot EQ^* = AE \cdot EC$, więc punkty P^* i Q^* leżą na okręgu ω_1.

By uniknąć rozważania niepotrzebnych przypadków, posługujemy się kątami skierowanymi. Kątem skierowanym między prostą k i l nazywamy taką liczbę α z przedziału $[0^\circ, 180^\circ)$, że po obróceniu prostej k przeciwnie do ruchu wskazówek zegara o kąt α proste k' i l będą równoległe. Dla kątów skierowanych zachodzi następująca własność: *kąt skierowany między prostą k i l jest równy kątowi skierowanemu między prostą k' i l' i różny od 0° wtedy i tylko wtedy, gdy punkty $k \cap l, k' \cap l', k \cap k', l \cap l'$ leżą na jednym okręgu.* Będę ją nazywał **Własnością 1**.

Na mocy Własności 1 (patrz margines) wystarczy zatem wykazać, że proste Q^*B^* i PD przecinają się na okręgu ω_1. To zaś, ponownie na mocy Własności 1, jest równoważne równości

$$\sphericalangle P^*PD = \sphericalangle P^*Q^*B^*. \tag{2}$$

Niech P' będzie drugim przecięciem prostej P^*P z okręgiem $\omega_3 = AI_E^t(\omega_2)$. Ponieważ okrąg ω_3 przechodzi na okrąg ω_2 w pewnej jednokładności o środku w E (co wynika z definicji inwersji), więc proste DP i B^*P' są równoległe, stąd

$$\sphericalangle P^*PD = \sphericalangle P^*P'B^*. \tag{3}$$

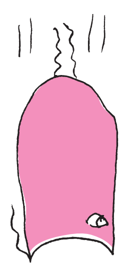
Ponieważ punkty P^*, P', Q^* i B^* leżą na jednym okręgu, to na mocy Własności 1 zachodzi

$$\sphericalangle P^*P'B^* = \sphericalangle P^*Q^*B^*. \tag{4}$$

Równości (3) i (4) implikują (2), więc również (1), co kończy dowód. $\square$

W dowodzeniu kolejnych twierdzeń przyda nam się następujące stwierdzenie, które jest w pewnym sensie odwróceniem Twierdzenia 1. Jego dowód pozostawiamy Czytelnikowi.

Stwierdzenie. Jeśli kąty w odpowiadających wierzchołkach czworokątów $ABCD$ i $A^*B^*C^*D^*$ sumują się do 180 stopni oraz istnieją takie punkty P i $P^\diamond$, że $wk(P, ABCD) = wk(P^\diamond, C^*D^*A^*B^*)$, to czworokąty te są bliźniacze.



Wyposażeni w przedstawione narzędzia możemy udowodnić poniższe Twierdzenia 2 i 3. Czytelnika Dociekliwego zachęcamy do samodzielnego zmierzenia się z tymi twierdzeniami przed przeczytaniem zamieszczonych dowodów. Można spróbować uzasadnić je bez powoływania się na Twierdzenie 1 (takie dowody są przedstawione w pełnej wersji mojej pracy *Czworokąty bliźniacze* dostępnej na stronie `deltami.edu.pl`).

Twierdzenie 2. Jeśli $ABCD \approx A^*B^*C^*D^*$ oraz w czworokąt $ABCD$ da się wpisać okrąg, to w czworokąt $A^*B^*C^*D^*$ też da się wpisać okrąg.

Dowód. Na półprostych B^*C^* i A^*D^* wybierzmy punkty C_1^* i D_1^* tak, że odcinki C^*D^* i $C_1^*D_1^*$ są równoległe oraz w czworokąt $A^*B^*C_1^*D_1^*$ można wpisać okrąg. Wystarczy udowodnić, że $C_1^* = C^*$ i $D_1^* = D^*$.

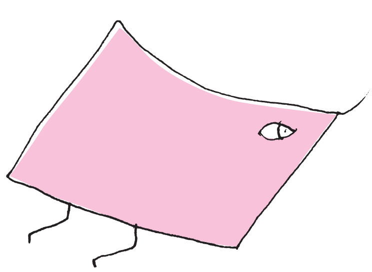
Niech I i I^* będą środkami okręgów wpisanych w $ABCD$ i $A^*B^*C_1^*D_1^*$. Zauważmy, że

$$\sphericalangle AIB = 180^\circ - \frac{A}{2} - \frac{B}{2}$$

oraz

$$\sphericalangle C_1^*I^*D_1^* = 180^\circ - \frac{C_1^*}{2} - \frac{D_1^*}{2} = 180^\circ - \frac{C^*}{2} - \frac{D^*}{2} = \frac{C}{2} + \frac{D}{2},$$

zatem ponieważ $A + B + C + D = 360^\circ$, to $\sphericalangle AIB = \sphericalangle C_1^*I^*D_1^*$. W tej sytuacji punkty I i I^* mają takie same pierwsze współrzędne kątowe odpowiednio względem czworokątów $ABCD$ i $C_1^*D_1^*A^*B^*$. Analogicznie możemy dowieść, że pozostałe trzy współrzędne też są takie same, zatem $wk(I, ABCD) = wk(I^*, C_1^*D_1^*A^*B^*)$, skąd na mocy Stwierdzenia wnioskujemy, że $ABCD \approx A^*B^*C_1^*D_1^*$. Zgodnie z założeniami mamy $ABCD \approx A^*B^*C^*D^*$, zatem czworokąty $A^*B^*C^*D^*$ i $A^*B^*C_1^*D_1^*$ są podobne, skąd łatwo wywnioskować, że $C_1^* = C^*$ i $D_1^* = D^*$, a to kończy dowód. $\square$



Twierdzenie 3. Jeśli $ABCD \approx A^*B^*C^*D^*$ oraz proste AC^*, CA^* i BD^* są współpękowe, to przez ich punkt przecięcia przechodzi prosta DB^*.

Dowód. Niech punkt P będzie przecięciem wyżej wymienionych trzech prostych. Załóżmy ponadto, że P nie leży na okręgu opisanym na trójkącie $A^*C^*D^*$ (dowód w przeciwnym przypadku jest raczej techniczny i mniej ciekawy).

Rozważmy taki punkt $P^\diamond$, by

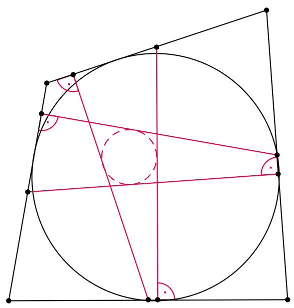
$$wk(P, ABCD) = wk(P^\diamond, C^*D^*A^*B^*) \tag{5}$$

(istnienie takiego punktu gwarantuje nam Twierdzenie 1). Ponieważ proste

AC^*, CA^* i BD^* są współpękowe, to zachodzą równości kątów

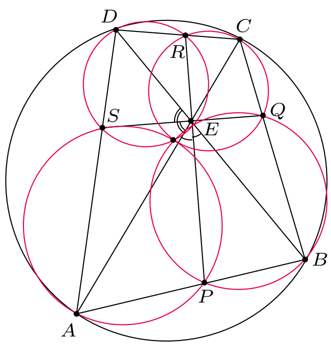
$$\sphericalangle C^*P^\diamond D^* = \sphericalangle APB = \sphericalangle C^*PD^* \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle A^*P^\diamond C^* = \sphericalangle CPA = \sphericalangle A^*PC^*,$$

one zaś implikują, że czworokąty $PD^*C^*P^\diamond$ i $PC^*A^*P^\diamond$ są wpisane w okręgi. Ponieważ czworokąt $PD^*C^*A^*$ nie jest wpisany w okrąg, więc $P^\diamond = P$ lub $P^\diamond = C^*$. W analogiczny sposób możemy jednak udowodnić, że $P^\diamond = P$ lub $P^\diamond = A^*$ (role punktów A^* i C^* są symetryczne), zatem musi być $P^\diamond = P$. Z (5) wynika zatem, że $\sphericalangle A^*PB^* = \sphericalangle CPD$, z tego zaś mamy, że punkty D, P i B^* są współliniowe, więc teza zachodzi. □



Rys. 5

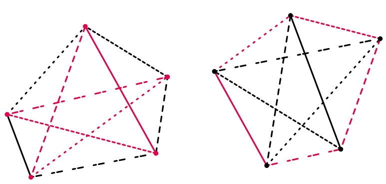
Na zakończenie pozostawiamy dla Czytelnika dwa zadania, które da się rozwiązać, wykorzystując czworokąty bliźniacze – rozwiązania te można znaleźć w pełnej wersji mojej pracy zgłoszonej na Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki im. Pawła Domańskiego. Pierwsze z nich zostało przedstawione na stronie `www.gogeometry.com` jako problem 1351, bez znanego geometrycznego dowodu; to właśnie ono było dla mnie motywacją do napisania pracy. Drugie zadanie jest zadaniem autorskim, powstałym w trakcie badania czworokątów bliźniaczych.



Rys. 6

Zadanie 1. W czworokąt wypukły $ABCD$ można wpisać okrąg. Przez środek każdego z odcinków AB, BC, CD, DA poprowadzono proste prostopadłe do przeciwległych boków czworokąta $ABCD$. Proste te ograniczają obszar będący czworokątem wypukłym. Wykazać, że w ten czworokąt również można wpisać okrąg (rys. 5).

Zadanie 2. Na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg. Niech E będzie punktem przecięcia przekątnych czworokąta. Załóżmy, że dwusieczna kąta AEB przecina prostą AB w punkcie P, zaś prostą DC w punkcie R; niech ponadto dwusieczna kąta BEC przecina prostą BC w punkcie Q, zaś prostą AD w punkcie S. Udowodnić, że okręgi opisane na trójkątach ΔPBQ, ΔQCR, ΔRDS, ΔSAP mają punkt wspólny (rys. 6).



Rys. 7

Uwaga końcowa. Jak już nadmieniłem we wstępie, czworokąty bliźniacze na płaszczyźnie da się narysować w taki sposób, by ich odpowiadające boki i przekątne były równoległe. Można się zastanowić, czy istnieją inne pary n-kątów o tej własności, że da się je narysować w taki sposób, by ich odpowiadające sobie boki i przekątne były do siebie równoległe oraz by n-kąty te nie były do siebie podobne. Dla $n = 3$ oczywiście taka para nie istnieje, z kolei przykład dla $n = 5$ przedstawiony jest na marginesie. Potrafię udowodnić, że takich par jest stosunkowo mało, w szczególności nie dla każdego n-kąta istnieje tak zdefiniowany n-kąt bliźniaczy. Zachęcam Czytelnika do próby znalezienia odpowiedzi na to pytanie!

Odpowiedzi do artykułu *Mały Gauss*

FI. Załóżmy, że w sprawdzanej pracy Bolka mamy $x_{11} = g$, $x_{12} = h$. Jeśli dalej obliczał prawidłowo (przynajmniej do miejsca x_{17}), to uzyskał następujące wartości:

$$x_{13} = g + h,$$
$$x_{14} = g + 2h,$$
$$x_{15} = 2g + 3h,$$
$$x_{16} = 3g + 5h,$$
$$x_{17} = 5g + 8h.$$

Fibonaccia oblicza:

$$x_{11} - 8x_{15} + 3x_{17} =$$
$$= g - 8(2g + 3h) + 3(5g + 8h) =$$
$$= 0.$$

FII. Jeśli Lolek prawidłowo wykonał swoje rachunki, to zachodzą:

$$(1) \qquad \begin{cases} x_2c + x_1d = x_3 \\ x_3c + x_2d = x_4 \end{cases}$$

oraz

$$(2) \qquad x_4c + x_3d = x_5.$$

Rozwiązując (dowolną metodą) układ równań (1) z niewiadomymi c, d, otrzyma

$$c = \frac{x_2x_3 - x_1x_4}{x_2^2 - x_1x_3}, \qquad d = \frac{x_2x_4 - x_3^2}{x_2^2 - x_1x_3},$$

co po podstawieniu do wzoru (2) daje następującą „tożsamość weryfikującą”:

$$x_5 = x_4 \cdot \frac{x_2x_3 - x_1x_4}{x_2^2 - x_1x_3} + x_3 \cdot \frac{x_2x_4 - x_3^2}{x_2^2 - x_1x_3}.$$

Jako wielomian weryfikujący F_2 można więc przyjąć

$$F_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) =$$
$$= x_3^3 + x_1x_4^2 + x_5x_2^2 - 2x_2x_3x_4 - x_1x_3x_5.$$