Ślad ruchomego odcinka

*Jarosław GÓRNICKI**

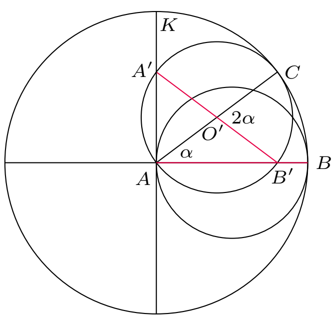
* Wydział Matematyki i Fizyki Stosowanej, Politechnika Rzeszowska

Choć ruch jest wszechobecny w naszym otoczeniu, to opis dynamicznych zmian będących jego wynikiem sprawia nam kłopot. Oto kilka prostych obserwacji.

O toczeniu okręgu pisali perski astronom Nasir al-Din al-Tusi w 1247 r., Mikołaj Kopernik w 1543 r., a w 1570 r. włoski matematyk Gerolamo Cardano, odpowiedzialny również za wzory opisujące rozwiązania równań trzeciego stopnia.

Gdy okrąg toczy się bez poślizgu po wewnętrznej stronie nieruchomego okręgu o dwa razy większej średnicy, to dowolnie wybrany punkt mniejszego okręgu przesuwa się po średnicy dużego okręgu tam i z powrotem.

Wykażemy, że tak jest. Na małym okręgu ustalmy punkty A i B, tak jak na rysunku 1. Gdy mały okrąg toczy się po łuku BC i kąt $\sphericalangle BAC = \alpha > 0$, to przecina odcinek AB w takim punkcie B', że kąt $\sphericalangle B'O'C = 2\alpha$. Wówczas łuki BC oraz $B'C$ są tej samej długości. Oznacza to, że podczas toczenia małego okręgu punkt B przesuwa się do punktu B' wzdłuż prostej AB, co chcieliśmy uzasadnić.

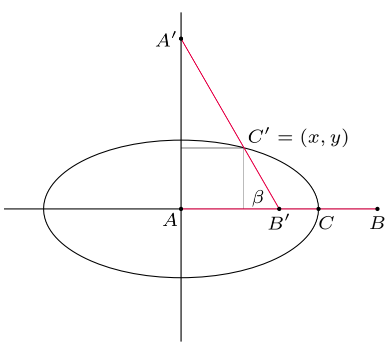


Rys. 1

Zauważmy, że w tym samym czasie punkt A przesuwa się do punktu A' wzdłuż prostej AK. Punkt A' z punktem B' są końcami średnicy małego okręgu (bo łuki CB' i AA' są równej długości), więc kąt $\sphericalangle A'AB$ jest prosty. Mamy więc dodatkową informację: podczas opisanego toczenia końce odcinka AB ślizgają się po wzajemnie prostopadłych średnicach większego okręgu.

Okazuje się, że:

Każdy punkt pośredni odcinka AB, którego końce ślizgają się po wzajemnie prostopadłych prostych, zakreśla elipsę (rys. 2).



Rys. 2

Wiedział to już Proklos (412–485). Uzasadnienie jest łatwe. Ponieważ

$$\frac{x}{|A'C'|} = \cos\beta, \qquad \frac{y}{|C'B'|} = \sin\beta,$$

więc z zależności

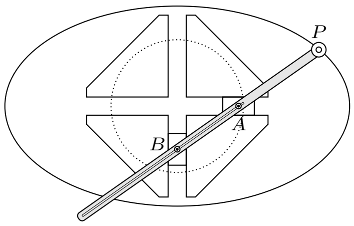
$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1, \qquad |A'C'| = |AC|, \qquad |C'B'| = |CB|$$

mamy

$$\frac{x^2}{|AC|^2} + \frac{y^2}{|CB|^2} = 1,$$

a to jest równanie elipsy. Analogiczna sytuacja ma miejsce, gdy punkt zakreślający krzywą leży na przedłużeniu odcinka AB. Mamy zatem kolejną obserwację:

Jeśli punkty A i B prostej L ślizgają się po wzajemnie prostopadłych prostych, to każdy inny punkt prostej L zakreśla elipsę.

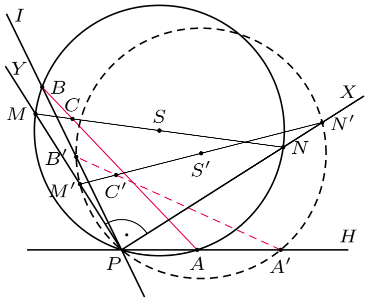


Rys. 3

Rezultat ten jest podstawą konstrukcji „cyrkla” do wykreślania elipsy o danym środku, danych kierunkach głównych i danych długościach osi (rys. 3).

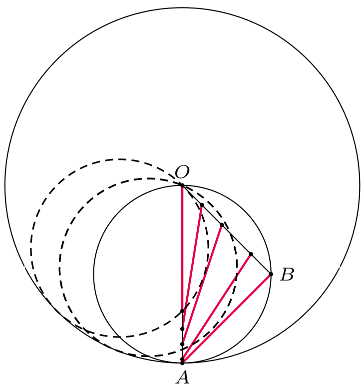
A jak wygląda sytuacja, gdy punkty A i B ślizgają się po ramionach kąta $\alpha \in (0, \pi)$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$? Problem ten rozstrzygnął w 1646 roku Frans van Schooten (Młodszy, 1615–1660). Był on holenderskim matematykiem związanym ze szkołą inżynierską w Lejdzie oraz uczniem i przyjacielem René Descartesa (Kartezjusza). W 1637 roku pomagał Kartezjuszowi w przygotowaniu ilustracji do pierwszego wydania traktatu *Discours de la méthode...*, który zawierał esej *La géométrie*. W 1649 roku van Schooten przetłumaczył na łacinę i wydał *Geometrię* Kartezjusza, wraz z licznymi komentarzami i uzupełnieniami (swoimi i swoich uczniów). Van Schooten stał się jednym z pierwszych matematyków promujących i rozpowszechniających nową

Geometrię Kartezjusza. Znakomitym uczniem van Schootena był Christiaan Huygens.



Rys. 4

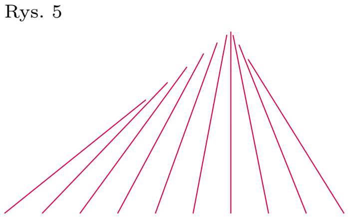
Rozwiązanie van Schootena jest geometryczne i niezwykle pomysłowe. Niech dany będzie kąt $\sphericalangle IPH$, różny od kąta prostego. Po ramionach tego kąta ślizga się odcinek AB (rys. 4). Jaką krzywą zakreśla wówczas punkt C należący do tego odcinka i nie będący jego końcem? Punkty A, B i P jednoznacznie wyznaczają okrąg o środku S opisany na trójkącie $\triangle ABP$. Prosta SC wyznacza średnicę MN. Wówczas proste PM i PN tworzą kąt prosty. Po przemieszczeniu się odcinka AB do położenia $A'B'$ punkty A', B' i P wyznaczają okrąg o środku S' opisany na trójkącie $\triangle A'B'P$. Prosta $S'C'$ wyznacza jego średnicę $M'N'$. Oczywiście $|MN| = |M'N'|$, bo utworzone okręgi są przystające (gdyż kąt $\sphericalangle IPH$ wpisany w oba okręgi wyznacza w nich cięciwy równej długości). Ponadto kąty $\sphericalangle NCA$ i $\sphericalangle N'C'A'$ są równe (cięciwy AB i $A'B'$ są takiej samej długości, więc ich odległości od środków odpowiednich okręgów pozostają stałe). Analogicznie, kąty $\sphericalangle BCM$ i $\sphericalangle B'C'M'$ są równe. W tej sytuacji, dla przystających okręgów łuk AN jest takiej samej długości jak łuk $A'N'$, więc kąty wpisane oparte na tych łukach są równe, tj. $|\sphericalangle NPA| = |\sphericalangle N'PA'|$. Ponieważ kąty te leżą po tej samej stronie prostej PH, więc punkt N' leży na prostej PN. Z analogicznych powodów punkt M' leży na prostej PM. Oznacza to, że ślad punktu C możemy wyznaczyć z ruchu odcinka MN, którego końce ślizgają się po wzajemnie prostopadłych prostych PX i PY. Z wcześniejszych rozważań wiemy już, że w tym przypadku punkt C zakreśla łuk elipsy. Zatem mamy:



Rys. 5

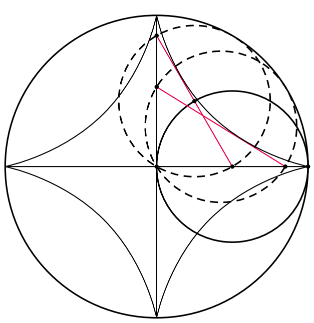
Twierdzenie (Frans van Schooten (Młodszy), 1646 r.). *Jeśli punkty A i B prostej L ślizgają się po ramionach kąta $\alpha \in (0, \pi)$, to każdy inny punkt prostej L zakreśla elipsę.*

A może potrafimy coś powiedzieć o obszarach „zakreślanych" przez tak wędrujące odcinki? W *Kalejdoskopie matematycznym* Hugona Steinhausa wiele wyjaśniają rysunki (rys. 5, 6) oraz tekst: „*Gdy poruszamy zapałkę tak, żeby jej oba końce biegły po prostych przecinających się, to ruch jej jest identyczny z ruchem cięciwy mniejszego koła w systemie* (...) *dwóch kół* [patrz rys. 1]. *Trzeba tylko wziąć przecięcie prostych za środek dużego koła, a małe koło narysować przez środek dużego i oba końce zapałki.*" Gdy końce odcinka ślizgają się po wzajemnie prostopadłych prostych, to zamiecie on obszar ograniczony *asteroidą* (rys. 7).



Rys. 6. Każdy trójkąt da się zamieść odcinkiem przy odpowiednim ruchu

Z przemieszczaniem odcinka na płaszczyźnie związanych jest wiele ciekawych i niebanalnych zagadnień, np.:

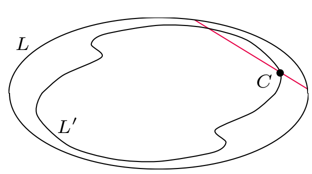


Rys. 7

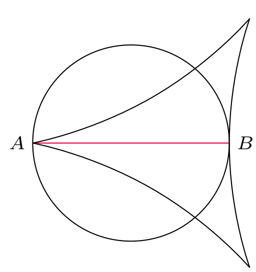
Twierdzenie (Hamnet Holditch, 1858 r.). *Jeśli oba końce odcinka ślizgają się po krzywej zamkniętej L, a punkt C dzielący odcinek w stosunku $a : b$ zakreśla krzywą L', to różnica pól figur ograniczonych krzywymi L i L' jest równa πab.* (Patrz rys. 8 oraz Δ^{8}_{84}, Δ^{10}_{86}.)

Problem (Sōichi Kakeya, 1917 r.). *Na płaszczyźnie wyznaczyć zbiór o najmniejszym polu, w którym można odcinek jednostkowy obrócić o kąt co najmniej π* (o zmaganiach z tym problemem pisaliśmy też w Δ^{6}_{83}, Δ^{4}_{13}).

Dwa przykłady zbiorów, w których możliwy jest obrót odcinka, pokazano na rysunku 9.



Rys. 8



Rys. 9