

# Dzienne i nocne krzywe rowerowe

\*Uniwersytet Jagielloński, Collegium  
Medicum, Wydział Farmaceutyczny

Wojciech JAWIEN<sup>\*</sup>

*Jest to pełna wersja artykułu zamieszczonego w Delcie 10/2019. Wersja ta zawiera listingi programów opisywanych przez Autora w drukowanej wersji tekstu.*

Niech autorowi będzie wolno cofnąć się w czasy lśniących w słońcu chromowanych obręczy kół rowerów (lub wózków dzieciennych). Obręcze te rzucały rozmaite odbłaski na powierzchnię szosy. Bogactwo obserwowanych kształtów zachęcało do podjęcia próby opisanie ich w języku matematyki. Zrobimy to teraz, choć poniewczasie – bo współcześnie trudniej o okazję ujżenia tego zjawiska.

Ograniczymy się do światła odbijanego przez jeden z kołnierzy obręczy. Ma on pewną szerokość, więc odbłask jest figurą dwuwymiarową. Jeśli jednak ta szerokość będzie dążyć do zera, w granicy otrzymamy jako refleks obiekt jednowymiarowy. To jest właśnie nasza słoneczna albo dzienna krzywa rowerowa<sup>1</sup> (SKR).

Wyberzmy trójwymiarowy prostokątny układ współrzędnych tak, żeby środek okręgu będącego zbiorem rozpatrywanych punktów, od których odbija się światło, wypadł w początku układu współrzędnych, a okrąg ten (o jednostkowym promieniu) leżał w płaszczyźnie wyznaczonej przez poziomą oś  $x$  i pionową oś  $z$ . Powierzchnia szosy będzie mieć równanie  $z = -1$  (dla uproszczenia zaniedbujemy grubość opony).

Wprowadzimy cztery jednostkowe wektory:  $\mathbf{s}$  - wektor słoneczny (skierowany w stronę słońca),  $\mathbf{r}_0$  - wektor wodzący punktu na okręgu,  $\mathbf{n}$  - wektor normalny do powierzchni odbijającej w punkcie wskazanym przez  $\mathbf{r}_0$  i  $\mathbf{a}$  - wektor wyrażający kierunek promienia odbitego. Współrzędne trzech pierwszych wektorów zapiszemy, jak następuje:

$$\begin{aligned}\mathbf{s} &= (\rho\nu, \rho\tau, \sigma) \\ \mathbf{r}_0 &= (\xi, 0, \zeta) \\ \mathbf{n} &= (-\xi\mu, \nu, \zeta\mu)\end{aligned}$$

Wprowadziliśmy tu wiele zmiennych w celu uniknięcia ciągłego pisania sinusów i kosinusów kątów definiujących problem. Przyjmując typowe symbole dla kątów sferycznych oznaczyliśmy:  $\rho = \sin\theta$ ,  $\sigma = \cos\theta$ ,  $\tau = \sin\varphi$ ,  $\nu = \cos\varphi$ . Oznaczając literą  $\gamma$  kąt między wektorem  $\mathbf{n}$  a osią  $y$  mamy też  $\mu = \sin\gamma$ ,  $\nu = \cos\gamma$ .

W celu wyznaczenia  $\mathbf{a}$  posłużymy się prawem odbicia, które wyrazimy układem równań:

$$\begin{cases} \mathbf{s} \times \mathbf{n} = \mathbf{n} \times \mathbf{a} \\ \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} \end{cases}$$

Piszząc pierwsze równanie w postaci

$$(\mathbf{s} + \mathbf{a}) \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

mnożąc je wektorowo z lewej strony przez  $\mathbf{n}$  i korzystając z cudownej tożsamości  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$  dostaniemy

$$\mathbf{a} = \mathbf{n}(2\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{s} \tag{1}$$

Odbity promień światła biegnie wzdłuż prostej o kierunku wektora  $\mathbf{a}$  i przechodzącej przez punkt  $\mathbf{r}_0$ . Punkty leżące na tej prostej spełniają równanie:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{a} \tag{2}$$

---

<sup>1</sup>Tabachnikow zdefiniował krzywą rowerową (*bicycle curve*) jako linię zakreślaną przez tylne koło roweru, gdy przednie porusza się wzdłuż innej, zadanej krzywej (uogólnienie traktrisy). W tym artykule mówimy o czym innym - stąd dodatkowo, ciepły przymiotnik: słoneczna.

gdzie  $\lambda$  jest dowolną liczbą rzeczywistą. Łącząc wzory (1) i (2), podstawiając współrzędne wektorów  $\mathbf{r}_0$ ,  $\mathbf{n}$  i  $\mathbf{s}$ , oznaczając współrzędne  $\mathbf{r}$  przez  $x$ ,  $y$  i  $z$  oraz dołączając równanie szosy dostaniemy:

$$\begin{cases} -x + 2\zeta\lambda\mu^2\xi\sigma + 2\lambda\mu^2\xi^2\rho\nu - 2\lambda\mu\nu\xi\rho\tau - \lambda\rho\nu + \xi = 0 \\ -y + \lambda(-2\zeta\mu\nu\sigma - 2\mu\nu\xi\rho\nu + 2\nu^2\rho\tau - \rho\tau) = 0 \\ -z + 2\zeta^2\lambda\mu^2\sigma + 2\zeta\lambda\mu^2\xi\rho\nu - 2\zeta\lambda\mu\nu\rho\tau + \zeta - \lambda\sigma = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Gdy koniec wektora  $\mathbf{r}_0$  przebiega po okręgu, punkt o współrzędnych  $(x, y)$  spełniających powyższy układ równań podąża wzdłuż SKR. Zwróćmy jednak uwagę na to, że w opisie matematycznym dopuściliśmy przypadki nieodpowiadające fizycznej rzeczywistości. Po pierwsze promień musi zostać odbity w dół, aby paść na drogę. Tak będzie tylko wtedy, gdy  $a_z < 0$ . Po drugie możliwe są odbicia tylko od zewnętrznej powierzchni kołnierza, co wyrazić można warunkiem  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} \geq 0$ . Możemy więc na krzywej opisanej powyższym równaniem wyróżnić część rzeczywistą, odpowiadającą spełnieniu obydwu warunków i pozostałą część – urojoną.

Jeśli wyrazimy współrzędne wektora wodzącego przez kąt, jaki tworzy on z osią  $x$  i wyeliminujemy  $\lambda$ , otrzymamy parametryczne równanie krzywych. Pozwala to łatwo sporządzić ich wykresy dla różnych położań słońca oraz różnych kątów  $\gamma$  i przekonać się jak bardzo mogą być różnorodne (rys. 1). Urojone fragmenty krzywych wyróżnione są kolorem.

W nowszych rowerach kąt  $\gamma$  jest często równy zeru – kołnierz jest płaskim pierścieniem, a nie poboczną stożką ściętego. Wtedy, jak łatwo się przekonać, SKR redukuje się do elipsy. Inny szczególny przypadek, to jazda o zachodzie słońca w kierunku prostopadłym do wektora słonecznego. Również wtedy SKR będzie krzywą stożkową, tym razem hiperbolą. Są to więc krzywe algebraiczne stopnia drugiego. Spytajmy, czy w pozostałych przypadkach SKR też jest krzywą algebraiczną i jaki może być jej stopień?

Dodając do układu (3) warunek  $\xi^2 + \zeta^2 - 1 = 0$  dostajemy zbiór równań z niewiadomymi  $x, y, z, \xi, \zeta, \lambda$ . Jeśli uda się nam wyeliminować zmienne  $\xi, \zeta, z$  i  $\lambda$  to powinniśmy uzyskać poszukiwane równanie krzywej, wiążące  $x$  i  $y$ . Otóż da się to zrobić, choć raczej nie na tablicy, czy kartce papieru. Skorzystamy z programu Singular, który umożliwia rozwiązywanie problemów z zakresu algebry wielomianów.

Oto listing z wykonania tego programu dla naszego problemu:

```

SINGULAR / Development
A Computer Algebra System for Polynomial Computations / version 4.1.0
0<
by: W. Decker, G.-M. Greuel, G. Pfister, H. Schoenemann \ Nov 2016
FB Mathematik der Universitaet, D-67653 Kaiserslautern \
bike.sin 1> //
bike.sin 2. // Słoneczne krzywe rowerowe.
bike.sin 3. //
bike.sin 4. // Równania naszego problemu dane są wielomianami
bike.sin 5. // zmiennych xi, zeta, x, y i z.
bike.sin 6. // Współczynniki występujące w tych równaniach (lambda..upsilon)
bike.sin 7. // też potraktujemy jak zmienne.
bike.sin 8. // Dzięki temu możemy rozważyć pierścień wielomianów w tych wszystkich
bike.sin 9. // zmiennych, ale o współczynnikach z ciała liczb wymiernych (QQ)
bike.sin 10. //
```

```

bike.sin 11. ring RR=QQ,(x,y,z,xi,zeta,lambda,mu,nu,sigma,rho,tau,upsilon),dp;
bike.sin 12> //
bike.sin 13. // Rozważamy ideał rozpięty przez wielomiany
bike.sin 14. // naszego problemu
bike.sin 15. //
bike.sin 16. ideal I = -x+xi+2*zeta*lambda*mu^2*xi*sigma-2*lambda*mu*nu*xi*rho*tau
bike.sin 17.             -lambda*rho*upsilon+2*lambda*mu^2*xi^2*rho*upsilon,
bike.sin 18.             -y+lambda*(-2*zeta*mu*nu*sigma-rho*tau+2*nu^2*sigma*tau
bike.sin 19.             -2*mu*nu*xi*rho*upsilon),
bike.sin 20.             -z+zeta-lambda*sigma+2*zeta^2*lambda*mu^2*sigma
bike.sin 21.             -2*zeta*lambda*mu*nu*rho*tau
bike.sin 22.             +2*zeta*lambda*mu^2*xi*rho*upsilon,
bike.sin 23.             xi^2+zeta^2-1, z-1; // ignorujemy związki między
bike.sin 24>                                     // pozostałymi zmiennymi
bike.sin 25. //
bike.sin 26. // interesuje nas efektywność: włączamy raportowanie czasu procesora.
bike.sin 27. // potem też spytamy o maksymalną użytą pamięć
bike.sin 28. //
bike.sin 29. timer=1;
//used time: 0.05 sec
bike.sin 30> //
bike.sin 31. ideal el=eliminate(I,zeta*xi*lambda*z);
//used time: 0.20 sec
bike.sin 32> // pytanie o RAM
bike.sin 33> memory(2); // 2 - maksymalna [B]
2232320
bike.sin 34> // sprawdzamy, czy układ zredukował się do jednego wielomianu
bike.sin 35. size(el);
1
bike.sin 36> // oglądamy jednomiany (bez współczynników) obecne
bike.sin 37. // w rozwiązaniu
bike.sin 38. //
bike.sin 39. matrix m=coef(el[1],x*y*z*xi*zeta*lambda);
bike.sin 40> m[1,1..ncols(m)];
x^4 x^3*y x^2*y^2 x*y^3 y^4 x^3 x^2*y x*y^2 y^3 x^2 x*y y^2 y
bike.sin 41> //
bike.sin 42. // Krzywe rowerowe są krzywymi algebraicznymi stopnia czwartego
bike.sin 43. // (z wyjątkiem przypadków zdegenerowanych).
bike.sin 44. // Zmienne xi, zeta, lambda i z rzeczywiście zniknęły.
bike.sin 45. // Nie ma wyrazu wolnego, co nie jest dziwne.
bike.sin 46. // Nie dziwi też brak wyrazu liniowego w x.
bike.sin 47. //
bike.sin 48. exit;
Auf Wiedersehen.

```

Uzyskany w okamgnieniu wynik dotyczy szerszej klasy krzywych, nie uwzględniliśmy bowiem związków  $\mu^2 + \nu^2 = 1$ ,  $\sigma^2 + \rho^2 = 1$  i  $\tau^2 + v^2 = 1$ . Ich dołączenie pozwala odkryć jeszcze jedną właściwość krzywych rowerowych – współczynniki przy wyrazach  $x^3y$  i  $xy^3$  są jednakowe. Udaje się to jednak stwierdzić kosztem użycia znacznie większych zasobów obliczeniowych i po „ręcznym” wyeliminowaniu  $z$  i  $\lambda$ . Trzeba przy tym poczynić pewne założenia zapobiegające dzieleniu przez zero.

...

```

bike2.sin 14. poly q = sigma-2*zeta^2*mu^2*sigma+2*zeta*mu*rho
bike2.sin 15.             *(nu*tau-mu*xi*upsilon);

```

```

bike2.sin 16> ideal I = x*q-xi*(sigma+2*zeta*mu^2*sigma-2*mu*nu*rho*tau)
bike2.sin 17.      +(1+zeta)*rho*upsilon-2*mu^2*xi^2*rho*upsilon,
bike2.sin 18.      y*q+(1+zeta)*(2*zeta*mu*nu*sigma+rho*tau-2*nu^2*rho*tau
bike2.sin 19.      +2*mu*nu*xi*rho*upsilon),
bike2.sin 20.      xi^2+zeta^2-1,mu^2+nu^2-1,sigma^2+rho^2-1,tau^2+upsilon^2-1;
...
bike2.sin 27. ideal el=eliminate(I,zeta*xi);
//used time: 8313.25 sec
...
bike2.sin 32. memory(2); // maksymalna
1881831032
bike2.sin 33> // tym razem znaleziona baza ideału zawiera 7 elementów
bike2.sin 34. size(el);
7
bike2.sin 35> //
bike2.sin 36. // Pierwsze trzy wyrażają niezmiennione związki między zmiennymi
bike2.sin 37. // mu..upsilon:
bike2.sin 38. //
bike2.sin 39. el[1..3];
tau^2+upsilon^2-1 sigma^2+rho^2-1 mu^2+nu^2-1
bike2.sin 40> //
bike2.sin 41. // Oglądamy jednomiany (bez współczynników) obecne
bike2.sin 42. // w czwartym wielomianie bazy. Można się przekonać,
bike2.sin 43. // że pozostałe elementy bazy nie wnoszą nic nowego,
bike2.sin 44. // o ile spełnione są związki między mu..upsilon.
bike2.sin 45. //
bike2.sin 46. matrix m=coef(el[4],x*y*xi*zeta);
bike2.sin 47> m[1,1..ncols(m)];
x^4 x^3*y x^2*y^2 x*y^3 y^4 x^3 x^2*y x*y^2 y^3 x^2 x*y y^2 y
bike2.sin 48> //
bike2.sin 49. // Żaden jednomian nie zniknął.
...
bike2.sin 61. // Ciekawa jest taka sama wartość
bike2.sin 62. // współczynników przy wyrazach x^3 y oraz x y^3.
bike2.sin 63. m[2,2]-m[2,4];
0
...

```

Co się zmieni, jeśli źródłem światła będzie żarówka znajdująca się blisko koła? Niech  $(R, \theta, \phi)$  będą teraz jej sferycznymi współrzędnymi. Wektor  $\mathbf{s}$  trzeba we wzorze (1) zastąpić wektorem  $\mathbf{b} = (R\mathbf{s} - \mathbf{r}_0)$ . Rys. 2 pokazuje kilka kształtów krzywych rowerowych dla nieodległego punktowego źródła światła.

```

bulbike.sin 2. // Latarniane (nocne) krzywe rowerowe.
...
bulbike.sin 12. ring RR=QQ,(x,y,z,xi,zeta,lambda,mu,nu,sigma,rho,tau,upsilon,R),dp;
...
bulbike.sin 37. ideal el=eliminate(I,zeta*xi*lambda*z);
//used time: 15888.88 sec

bulbike.sin 42> memory(2); // maksymalna
2347008000
bulbike.sin 43> // sprawdzamy, że baza zredukowała się do jednego wielomianu
bulbike.sin 44. size(el);
1
...

```

```

bulbike.sin 49. // To też krzywa czwartego stopnia
bulbike.sin 50> m[1,1..ncols(m)];
x^4 x^3*y x^2*y^2 x*y^3 y^4 x^3 x^2*y x*y^2 y^3 x^2 x*y y^2 y
...

```

Również tym razem stwierdzamy, nakładem ponad 4 godzin CPU i 2GiB RAM, że są to krzywe czwartego stopnia. Sprawdzenie dla przykładowych danych pokazuje, że współczynniki przy  $x^3y$  i  $xy^3$  nie muszą już być równe. Można badać różne wzajemne usytuowania koła i płaszczyzny – np. koło nieprostopadle do szosy (kolarz na zakręcie lub walczący z bocznym wiatrem), odbłask na ścianie itp. Warto więc zbadać powierzchnię (rozmaitość algebraiczną) utworzoną przez wszystkie promienie odbite. Wystarczy z układu (3) usunąć równanie szosy. Również tu otrzymujemy powierzchnię czwartego stopnia, zarówno dla krzywych dziennych, jak i nocnych:

```

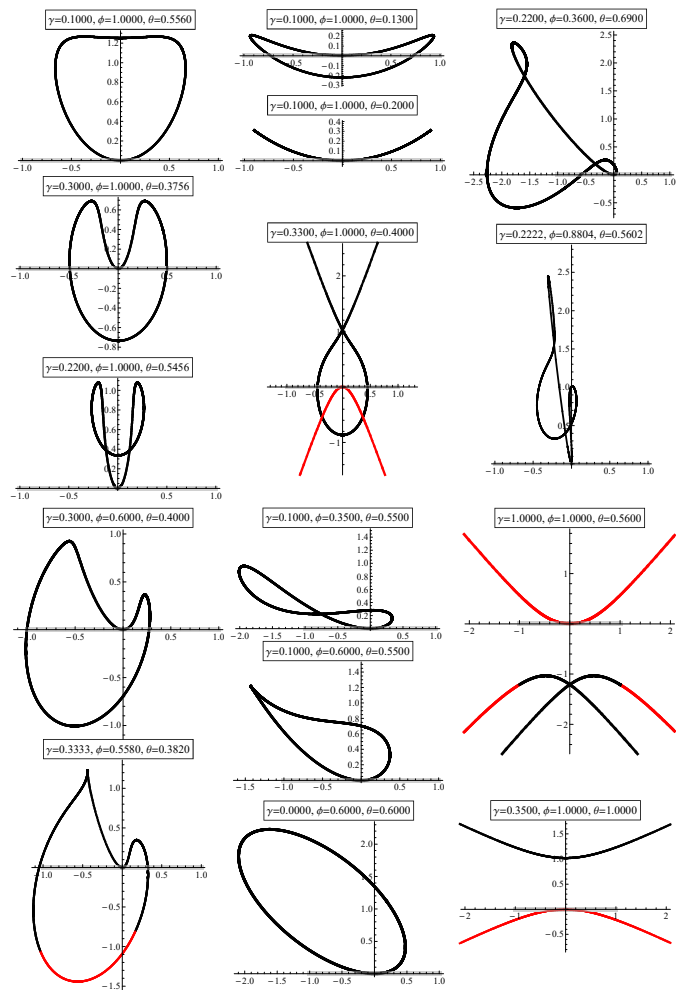
bikevar.sin 41> // powierzchnia dzienna
bikevar.sin 42. m[1,1..ncols(m)];
x^4 x^3*y x^2*y^2 x*y^3 y^4 x^3*z x^2*y*z x*y^2*z y^3*z
x^2*z^2 x*y*z^2 y^2*z^2 x*z^3 y*z^3 z^4 x^3 x^2*y x*y^2
y^3 x^2*z x*y*z y^2*z x*z^2 y*z^2 z^3 x^2 x*y y^2 x*z y*z z^2 x y z 1
...
bikevar.sin 43> deg(el[1]); // stopień wielomianu we wszystkich 9 zmiennych
22
bikevar.sin 44> size(el[1]); // liczba jednomianów tworzących wielomian
778
...
bulbikevar.sin 41> // powierzchnia nocna
...
bulbikevar.sin 42> deg(el[1]); // stopień wielomianu we wszystkich 10 zmiennych
22
bulbikevar.sin 43> size(el[1]); // liczba jednomianów tworzących wielomian
1014
...

```

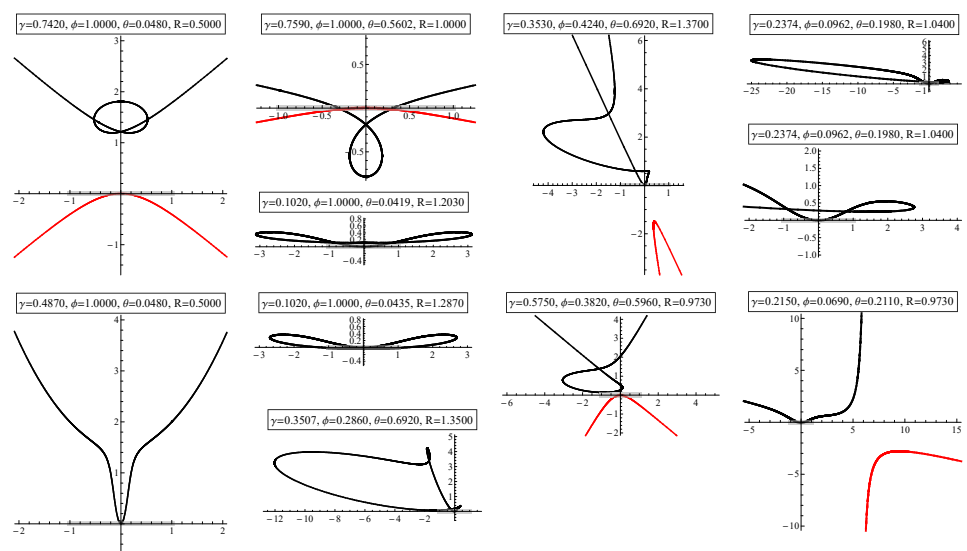
Wynika stąd, że przy dowolnym usytuowaniu płaszczyzny krzywe rowerowe są krzywymi czwartego stopnia.

Wszystkie przedstawione rezultaty można uzyskać na przeciętnym „pececie” w ciągu kilku godzin. Zanim jednak znalazłem właściwy sposób sformułowania zadań musiałem przekonać się, w ramach tzw. grantu testowego, że pierwotnie wybrane kierunki poszukiwań nie gwarantują szans na rozwiązanie przy wykorzystaniu znacznie potężniejszych zasobów dostępnych w infrastrukturze PL-Grid (RAM>256GiB, CPU>kilka dni). Dopiero te negatywne wyniki zmusiły mnie do znalezienia lepszego kierunku zaatakowania problemu. Dziękuję, PL-Grid!

Czytelnik Choć Trochę Dociekliwy (innych  $\Delta$  nie ma!) z pewnością będzie chciał wiedzieć, w jaki sposób program Singular dokonał zademonstrowanych eliminacji. Chętnie o tym opowiem i wyjaśnię, dlaczego na Wydziale Farmaceutycznym UJ interesujemy się pierścieniami wielomianów, ale chyba lepiej będzie to zrobić już przy innej okazji.



Rysunek 1: Przykłady słonecznych krzywych rowerowych. Kolorem zaznaczono urojone fragmenty krzywych. Jednostką miary kątów jest kąt prosty.



Rysunek 2: Przykłady krzywych rowerowych dla obręczy oświetlonej żarówką.