W poszukiwaniu trójkąta równobocznego

Bartłomiej BZDĘGA

Trójkąt równoboczny jaki jest, każdy widzi – ma trzy boki jednakowej długości i trzy kąty miary 60°. Aby wykazać, że dany trójkąt jest równoboczny, wystarczy dowieść jednego z następujących warunków:

- trzy jego boki mają jednakową długość,
- pewne dwa jego boki są jednakowej długości i pewien jego kąt ma miarę 60°,
- pewne dwa jego kąty mają miarę 60°.

W zadaniach 1–6 dowodzimy, że pewien konkretny trójkąt jest równoboczny. Pozostałe zadania również dotyczą trójkątów równobocznych, ale w bardziej zakamuflowany sposób – w każdym z nich jest ukryty trójkąt równoboczny, którego odnalezienie lub dorysowanie ułatwi rozwiązanie.

Zadania

1. Trójkąty BPC i CQD są równoboczne i leżą na zewnątrz równoległoboku $ABCD$. Udowodnić, że trójkąt APQ też jest równoboczny.
2. Dany jest sześciokąt foremny $ABCDEF$. Punkty K i L są środkami odcinków odpowiednio BD i EF. Dowieść, że trójkąt AKL jest równoboczny.
3. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach BC i CD prostokąta $ABCD$, przy czym trójkąt AEF jest równoboczny. Punkt M jest środkiem odcinka AF. Wykazać, że trójkąt BCM jest równoboczny.
4. Punkty A, B i C leżą kolejno na prostej ℓ. Punkty A_1 i C_1 leżą po tej samej stronie prostej ℓ, przy czym trójkąty ABC_1 i A_1BC są równoboczne. Punkty M i N są środkami odcinków odpowiednio AA_1 i CC_1. Udowodnić, że trójkąt BMN jest równoboczny.
5. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ i punkt O wewnątrz niego, przy czym zachodzą równości: $|AO| = |BO|$, $|CO| = |DO|$ i $|\sphericalangle AOB| = |\sphericalangle COD| = 120°$. Dowieść, że środki odcinków AB, BC i CD są wierzchołkami trójkąta równobocznego.
6. Na bokach trójkąta ABC, na zewnątrz niego, zbudowano trójkąty równoboczne BCD, CAE i ABF. Środkami tych trójkątów są odpowiednio punkty P, Q i R. Dowieść, że trójkąt PQR jest równoboczny (twierdzenie Napoleona).
7. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD, w którym $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle ABC| = 60°$. Na boku BC tego trapezu leży taki punkt E, że $|EB| = |CD|$. Wykazać, że $|BD| = |AE|$.
8. Punkt S leży wewnątrz sześciokąta foremnego $ABCDEF$. Udowodnić, że suma pól trójkątów ABS, CDS i EFS jest równa sumie pól trójkątów BCS, DES i FAS.
9. W czworokącie wypukłym $ABCD$ mamy $|\sphericalangle DAB| = 30°$. Wykazać, że $|AC| \leqslant |BC| + |CD| + |DB|$.
10. W czworościanie $ABCD$ wszystkie kąty płaskie przy wierzchołku D mają miarę 20°. Wykazać, że $|AB| + |BC| + |CA| \geqslant |AD|$.
11. Dany jest trójkąt ABC, w którym $|\sphericalangle ACB| = 120°$. Punkt M jest środkiem boku AB. Na odcinkach AC i BC wybrano odpowiednio takie punkty P i Q, że $|AP| = |PQ| = |QB|$. Wykazać, że $|\sphericalangle PMQ| = 90°$.
12. W trójkącie ABC mamy $|\sphericalangle ACB| = 120°$. Punkty D, E i F leżą na bokach odpowiednio BC, CA i AB, przy czym proste AD, BE i CF są dwusiecznymi kątów trójkąta ABC. Udowodnić, że $|\sphericalangle DFE| = 90°$.
13. Trójkąt ABC, w którym $|\sphericalangle BAC| = 90°$, jest podstawą ostrosłupa $ABCD$. Ponadto zachodzą równości $|AD| = |BD|$ oraz $|AB| = |CD|$. Udowodnić, że $|\sphericalangle ACD| \geqslant 30°$.
14. Wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC wybrano taki punkt P, dla którego wartość wyrażenia $|AP| + |BP| + |CP|$ jest najmniejsza (punkt Fermata–Torricellego). Wykazać, że $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle CPA| = 120°$.

Wskazówki do zadań

1. Trójkąty ABP, QDA i QCP są przystające (bkb).
2. Po podzieleniu sześciokąta $ABCDEF$ na 24 przystające trójkąty równoboczne można zauważyć, że odcinki AL, AK, KL są dłuższymi przekątnymi przystających równoległoboków.
3. Punkty C i M leżą na okręgu o średnicy EF, więc $|\sphericalangle ECM| = |\sphericalangle EFM| = 60°$, analogicznie $|\sphericalangle EBM| = 60°$.
4. Obracając trójkąt C_1BC wokół punktu B o 60°, otrzymamy trójkąt ABA_1. Obrazem punktu N w tym obrocie jest punkt M, więc $|BM| = |BN|$ i $|\sphericalangle MBN| = 60°$.
5. Obracając trójkąt AOC o 120° wokół punktu O, otrzymamy trójkąt BOD. Zatem te trójkąty są przystające oraz proste AC i BD przecinają się pod kątem 60°.
6. Trójkąt CAF jest podobny do trójkąta QAR w skali $\sqrt{3}$ (bkb), analogicznie trójkąt CBF do PBR. Stąd $|QR| = |CF|/\sqrt{3} = |PR|$. Tą samą metodą dowodzimy, że $|PQ| = |PR|$.
7. Przedłużmy ramiona trapezu do przecięcia się w punkcie P. Wówczas trójkąty ABP i CDP są równoboczne, dalej dowodzimy, że trójkąty ABE, APC i BPD są przystające (bkb).
8. Przedłużmy odcinki AB, CD i EF, otrzymując trójkąt równoboczny. Suma pól trójkątów ABS, CDS i EFS stanowi $\frac{1}{3}$ pola tego trójkąta.
9. Niech B' będzie punktem symetrycznym do B względem prostej AD. Wówczas trójkąt ABB' jest równoboczny oraz $|BC| + |CD| + |DB| = |BC| + |CD| + |DB'| \geqslant |BB'| = |AB|$.
10. Niech wielokąt $DABCA'$ będzie siatką tego czworościanu po rozcięciu wzdłuż krawędzi AD i usunięciu ściany ABC. Wówczas trójkąt ADA' jest równoboczny.
11. Niech punkt K będzie symetryczny do Q względem M. Wówczas trójkąt AKP jest równoboczny.
12. Zbudujmy równoboczny trójkąt BCK na zewnątrz trójkąta ABC. Wtedy $CF \parallel BK$. Korzystając z twierdzenia o dwusiecznej oraz podobieństwa trójkątów ACF i AKB, wykażemy, że FE jest dwusieczną kąta AFC. Analogicznie FD jest dwusieczną kąta BFC.
13. Wybierzmy taki punkt K, by czworokąt $BACK$ był prostokątem. Wtedy trójkąt CDK jest równoboczny. Z nierówności kąta trójściennego mamy $|\sphericalangle ACD| \geqslant |\sphericalangle ACK| - |\sphericalangle KCD| = 30°$.
14. Obróćmy trójkąt APC o 60° wokół punktu A, w kierunku zgodnym z orientacją trójkąta ABC. Otrzymamy trójkąt $AP'C'$, przystający do APC. Trójkąt APP' jest równoboczny, więc $|AP| + |BP| + |CP|$ jest równe długości łamanej $BPP'C'$, która jest najkrótsza, gdy jej wierzchołki są współliniowe.